L'hypothèse du cobordisme

Mémoire de M2 Mathématiques
2019/2020

Ismaïl Razack
Master de mathématiques
2ème année

Encadrant :
David Chataur

Sommaire

Introduction **1**

1 Théorie des champs quantique et topologique **3**
1.1 La catégorie des n-cobordismes . . . 3
1.2 Catégories monoïdales symétriques . . . 6
1.3 Définition et premières propriétés . . . 8
1.4 En dimension 1 . . . 11
1.5 En dimension 2 . . . 13

2 Catégories supérieures **15**
2.1 Première tentative de définition . . . 16
2.2 Modèle pour les $(\infty, 1)$-catégories . . . 19
2.3 Modèle pour les (∞, n)-catégories . . . 24

3 L'(∞, n)-catégories des bordismes **28**
3.1 Intervalles . . . 29
3.2 La catégorie des bordismes $Bord_n$ . . . 33
3.3 Structures sur les bordismes . . . 42

4 L'hypothèse du cobordisme **43**
4.1 Éléments dualisables . . . 43
4.2 Énoncé et conséquences . . . 47

Appendices **50**

A Ensembles simpliciaux **50**
A.1 Complexes simpliciaux . . . 50
A.2 Définitions et premier résultats . . . 52
A.3 Réalisation . . . 56
A.4 Complexe de Kan . . . 57
A.5 Homotopie simpliciale . . . 58

B Catégories modèles **59**
B.1 Définition et propriétés . . . 59
B.2 Homotopie . . . 62
B.3 Catégorie homotopique . . . 64

C Théorème de fibration de Ehresmann **65**
C.1 Champs de vecteurs et flots d'une variété . . . 65
C.2 Théorème de fibration d'Ehresmann . . . 70
C.3 Applications du théorème . . . 74

D Fibrés principaux **81**

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de comprendre l'hypothèse du cobordisme. Ce résultat, suggéré par John Baez et James Dolan [BD95] (1995) puis reformulé et prouvé par Jacob Lurie [Lur09b] (2009), peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème (Hypothèse du cobordisme)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une (∞-n)-catégorie symétrique monoïdale et F une théorie des champs quantique et topologique étendue (i.e. un foncteur $F : Bord_n^{fr} \to \mathcal{C}$).*
Le foncteur évaluation $F \mapsto F(pt_+)$ établit une correspondance entre les théories des champs quantiques et topologiques étendues et les éléments dualisables de $\mathcal{C}$.

Le résultat trouve ses origines dans la physique mathématique. A la fin des années 80, Edward Witten travaille sur l'aspect topologique des théories des champs quantiques. En particulier, il montre [Wit89] que les *invariants de Jones* des nœuds et entrelacs de $\mathbb{S}^3$ sont codés dans une théorie des champs de dimension 3, la *théorie de Chern-Simons*. Michael Atiyah [Ati88] axiomatise alors la notion de *théorie des champs quantique et topologique* (TCQT) afin d'établir un cadre rigoureux aux travaux de Witten.
Cette notion est également intéressante en dehors de la physique mathématique. Donnons un exemple issu de la théorie des représentations des groupes. Soient N_g une surface orientée, fermée de genre g et G un groupe fini, alors

$$\#Hom(\pi_1(N_g), G) = (\#G)^{2g-1} \sum_{\rho \in \Delta} \dim(V_\rho)^{2-2g}$$

où Δ est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles [FQ93].
Il est possible de classifier les TCQT pour des petites dimensions, mais la situation devient vite compliquée en dimension supérieure. Considérer des TCQT-*étendues* permet de donner une définition effective. Le bon cadre pour les définir et énoncer l'hypothèse du cobordisme est celui des catégories supérieures.
Le théorème fait intervenir un certain nombre de notions que nous allons progressivement développer le long du mémoire.
En se basant sur l'ouvrage [Koc04] de Joachim Kock, on commencera par définir la notion de théorie des champs quantique et topologique et on s'intéressera en particulier aux cas des dimensions 1 et 2. Ils nous permettront de présenter des versions plus simples de l'hypothèse du cobordisme.
Dans un deuxième temps, nous chercherons à définir les catégories supérieures. Après une première tentative inadaptée à notre situation, nous verrons que le bon cadre est celui des (∞, n)-catégories. Il existe plusieurs définitions équivalentes, nous ferons appel aux espaces de Segal complets à n-feuillets.
Dans la troisième partie, en se référant au travail [CS19] de Damien Calaque et

Claudia Scheimbauer, nous verrons comment définir une (∞, n)-catégorie de bordismes et la munir de structures supplémentaires (orientation, repères, ...). Finalement, dans une dernière partie, après avoir préciser la notion d'éléments dualisables, nous énoncerons l'hypothèse du cobordisme. Nous présenterons également un résultat plus général et quelques applications.

Remerciements. Je remercie mon encadrant David Chataur pour son aide et ses conseils concernant la rédaction de ce mémoire. Je souhaite également remercier Damien Calaque et Claudia Scheimbauer pour m'avoir permis d'utiliser les illustrations qui figurent dans leur article [CS19].

1 Théorie des champs quantique et topologique

En plus de servir de modèles-jouet en physique mathématique, les théories des champs quantiques et topologiques nous renseignent sur la structure des variétés et permettent d'extraire des invariants. En effet, elles ont été introduites pour comprendre la structure mathématique des invariants obtenus à partir des théories des champs de Chern-Simons.
Afin de pouvoir définir une TCQT, il nous faut au préalable étudier la catégorie des cobordismes $\mathbf{Cob}(n)$.

1.1 La catégorie des n-cobordismes

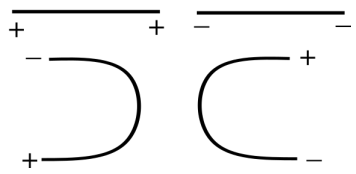
On travaille avec des variétés lisses orientées. Soit M une variété lisse orientée, on note $\overline{M}$ la variété M munie de l'orientation opposée. Étant donnée une variété orientée M, on peut munir son bord ∂M d'une orientation qui lui est propre (et non nécessairement induite par celle de M), ceci permet de définir des bords entrants ou sortants.

Définition 1.1. Soient B une variété orientée et M une sous-variété orientée de codimension 1. Pour un point $x \in M$, on se donne une base orientée positivement de T_xM, $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Un vecteur $w \in T_xB$ est **normal positif** si $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, w\}$ est une base orientée positivement de T_xB.
Supposons que M soit une composante connexe du bord de B. On dit que M est un **bord entrant** s'il existe un vecteur normal positif qui pointe vers l'intérieur de B. On dit que M est un **bord sortant** s'il existe un vecteur normal positif qui pointe vers l'extérieur de B. Le bord de B est alors l'union de (plusieurs) bords sortants et entrants.

Exemple 1.1. On considère l'intervalle $I = [0, 1]$ muni de l'orientation standard (induite par celle de $\mathbb{R}$). Regardons les différentes configurations possibles.

- Les points 0 et 1 sont orientés positivement (orientation standard). Dans ce cas, 0 est un bord entrant et 1 est un bord sortant.
- Les points 0 et 1 sont orientés négativement. Dans ce cas, 0 est un bord sortant et 1 est un bord entrant.
- Si 0 est orienté positivement et 1 est orienté négativement, ils sont tous les deux des bords entrants.
- Si 1 est orienté positivement et 0 est orienté négativement, ils sont tous les deux des bords sortants.

Remarque 1.1. Ces notions sont bien définies car elles ne dépendent pas du choix de vecteur normal positif, ni de $x \in M$.



Définition 1.2. Soient M et N deux $(n-1)$-variétés fermées orientées. Un **cobordisme** (orienté) de M à N est une variété compacte orientée B avec des applications lisses

$$M \to B \leftarrow N$$

telles que M soit difféomorphe (en préservant l'orientation) au bord entrant de B et N soit difféomorphe (en préservant l'orientation) au bord sortant de B. On note

$$M \Rightarrow N.$$

On retiendra que la variété B est un cobordisme entre M et N si son bord entrant est M et son bord sortant est N.

Exemple 1.2. Soit M une variété fermée orientée. Le cylindre $M \times [0,1]$ est un cobordisme de M vers elle-même en considérant les applications

$$M \to M \times \{0\} \subset M \times [0,1]$$

$$M \to M \times \{1\} \subset M \times [0,1].$$

D'autre part, s'il existe une variété B est un difféomorphisme préservant l'orientation $M \times [0,1] \to B$, B est également un cobordisme de M vers lui même. On souhaite identifier ce type de cobordismes.

Définition 1.3. Étant donné deux cobordismes B_1, B_2 entre M et N, on dit qu'ils sont **équivalents** s'il existe un difféomorphisme préservant l'orientation $\psi : B_1 \to B_2$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 & \\
M \arrow[ur] \arrow[dr] & & N \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & B_2 \arrow[uu, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la catégorie $\mathbf{Cob}(n)$ de la manière suivante.

1. Les objets de $\mathbf{Cob}(n)$ sont les $(n-1)$-variétés fermées orientées.

2. Soit $M, N \in Obj(\mathbf{Cob}(n))$. Un morphisme entre M et N est une classe d'équivalence de cobordismes.
3. Pour tout objet M de $\mathbf{Cob}(n)$, l'identité id_M est donnée par le "cylindre" $B = M \times [0,1]$.
4. La composition est donnée par le recollement des bordismes. Étant donnée trois objets M, N, L et deux bordismes $B : M \to N, C : N \to L$, la composée $C \circ B$ est le morphisme associé à la variété $B \amalg_N C$.

Remarque 1.2. Une même variété peut donner différents morphismes dans $\mathbf{Cob}(n)$. Par exemple, pour une $(n-1)$-variété fermée orientée M, il y a plusieurs manières de voir le cylindre $M \times [0,1]$ comme un morphisme. Il y a id_M et $id_{\overline{M}}$ mais aussi les deux morphismes suivants :

- On envoie M sur la première extrémité de $M \times [0,1]$ et $\overline{M}$ sur la seconde. Ceci donne une variété avec deux bords entrants. Ceci peut être vu comme un morphisme de $M \amalg \overline{M}$ vers $\emptyset$, on le notera ev_M.
- Inversement, en envoyant $\overline{M}$ sur la première extrémité et M sur la seconde, on obtient une variété à deux bords sortants, vue comme un morphisme de $\emptyset$ vers $\overline{M} \amalg M$. Il sera noté $coev_M$.

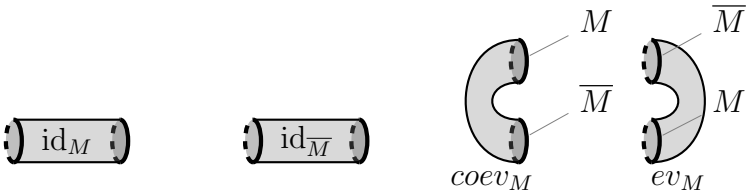
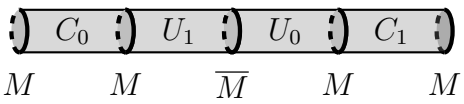


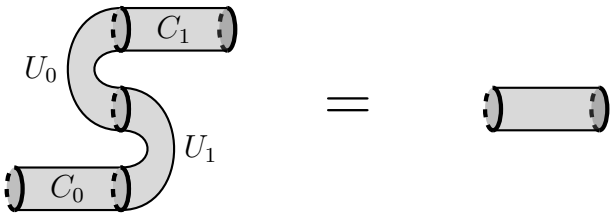
FIGURE 1 – Différentes manières de voir $M \times [0,1]$

On peut décomposer les cobordismes. Intuitivement, étant donné un cobordisme B entre M et N, une décomposition revient à se donner une sous-variété L qui coupe B en deux parties : une *partie entrante* avec tous les bords entrants et *partie sortante* avec les bords sortants. Plus précisément, il faut se donner une application lisse $f : B \to [0,1]$ telle que $f^{-1}(0) = M$ et $f^{-1}(1) = N$ et on découpe au niveau de $L := f^{-1}(t)$ pour t une valeur régulière. On demande de plus que L ait un vecteur normal positif qui pointe vers le bord sortant de B.

Exemple 1.3 (La décomposition en serpent du cylindre)**.** On considère la décomposition suivante du cylindre $B = M \times [0,1]$.



Précisons la partie entrante et la partie sortante. La partie entrante est $B_0 := C_0 \amalg U_0$, on la voit comme un cobordisme entre M et $M \amalg \overline{M} \amalg M$. La partie sortante est $B_1 := U_1 \amalg C_1$, on la voit comme un cobordisme entre $M \amalg \overline{M} \amalg M$ et M. En utilisant les différentes interprétations du cylindre vues précédemment, on obtient la décomposition suivante.



On va munir la catégorie $\mathbf{Cob}(n)$ de structures supplémentaires.

1.2 Catégories monoïdales symétriques

On souhaite généraliser la notion de monoïde aux catégories. Soit une catégorie $\mathcal{C}$, on la munit d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et d'un objet distingué $\mathbf{1}$ vérifiant pour tous objets de $\mathcal{C}$

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z),$$
$$\mathbf{1} \otimes x = x, \quad x \otimes \mathbf{1} = x.$$

En pratique, il n'est pas raisonnable d'exiger des égalités strictes, c'est pourquoi on travaillera à isomorphisme près.

Définition 1.5. Une **catégorie monoïdale** $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ est la donnée de

- une catégorie $\mathcal{C}$
- un foncteur $\begin{array}{c} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \\ (x, y) \mapsto x \otimes y, \end{array}$
- un objet $\mathbf{1}$ dénommé **objet neutre**,
- des isomorphismes naturels

$$a : ((-) \otimes (-)) \otimes (-) \to (-) \otimes ((-) \otimes (-))$$
$$l : \mathbf{1} \otimes (-) \to (-)$$
$$r : (-) \otimes \mathbf{1} \to (-)$$

tels que les digrammes suivants commutent.

– **identité du triangle**

$$\begin{tikzcd} (x \otimes \mathbf{1}) \otimes y \arrow[rr, "a_{x,\mathbf{1},y}"] \arrow[dr, "r_x \otimes \mathrm{id}_y"'] & & x \otimes (\mathbf{1} \otimes y) \arrow[dl, "\mathrm{id}_x \otimes l_y"] \\ & x \otimes y & \end{tikzcd}$$

– **identité du pentagone**

$$\begin{tikzcd}
 & (w \otimes x) \otimes (y \otimes z) \arrow[dr, "a_{w,x,y\otimes z}"] & \\
((w \otimes x) \otimes y) \otimes z \arrow[ur, "a_{w\otimes x,y,z}"] \arrow[d, "a_{w,x,y}\otimes \mathrm{id}_z"] & & (w \otimes (x \otimes (y \otimes z))) \\
(w \otimes (x \otimes y)) \otimes z \arrow[rr, "a_{w,x\otimes y,z}"] & & w \otimes ((x \otimes y) \otimes z) \arrow[u, "\mathrm{id}_w\otimes a_{x,y,z}"']
\end{tikzcd}$$

De plus, on dit qu'une telle catégorie est **tréssée** s'il existe un isomorphisme naturel, appelé **tressage**

$$\sigma : (-) \otimes (-) \to (-) \otimes (-)$$

$$\sigma_{x,y} : x \otimes y \to y \otimes x$$

vérifiant les **identités de l'hexagone** :

$$\begin{tikzcd}
(x \otimes y) \otimes z \arrow[r, "a_{x,y,z}"] \arrow[d, "\sigma_{x\otimes y,z}"] & x \otimes (y \otimes z) \arrow[r, "\mathrm{id}_x\otimes\sigma_{y,z}"] & x \otimes (z \otimes y) \arrow[d, "a^{-1}_{x,y,z}"] \\
z \otimes (x \otimes y) \arrow[r, "a^{-1}_{z,x,y}"] & (z \otimes x) \otimes y \arrow[r, "\sigma_{x,z}\otimes\mathrm{id}_y"] & (x \otimes z) \otimes y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x \otimes (y \otimes z) \arrow[r, "a^{-1}_{x,y,z}"] \arrow[d, "\sigma_{x,y\otimes z}"] & (x \otimes y) \otimes z \arrow[r, "\sigma_{x,y}\otimes\mathrm{id}_z"] & (y \otimes x) \otimes z \arrow[d, "a_{y,z,x}"] \\
(y \otimes z) \otimes x \arrow[r, "a_{y,z,x}"] & y \otimes (z \otimes x) \arrow[r, "\mathrm{id}_y\otimes\sigma_{z,x}"] & y \otimes (x \otimes z)
\end{tikzcd}$$

La catégorie est **monoïdale symétrique** si pour tous les objets x, y, on a

$$B_{y,x} = B^{-1}_{x,y}.$$

On retiendra que dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ on a un produit interne associatif (à isomorphisme près) ayant pour élément neutre $\mathbf{1}$. De plus, si elle est symétrique, le produit est commutatif.

Remarque 1.3. Une catégorie monoïdale est **stricte** si pour tout objet, les morphismes $a_{x,y,z},\ l_x,\ r_x$ sont l'identité.

Exemple 1.4. Une catégorie **cartésienne** est une catégorie monoïdale dont la structure monoïdale provient du produit. L'objet neutre est un objet terminal. Voici quelques exemples de catégories cartésiennes :

– ***Sets***, la catégorie des ensembles muni du produit cartésien. L'objet neutre est l'ensemble à un élément $\{*\}$,
– ***Top***, la catégorie des espaces topologiques.
– ***Cat***, la catégorie des petites catégories. La structure monoïdale est donnée par le produit des catégories.

Exemple 1.5. Soit k un corps. La catégorie $(\mathbf{Vect}(k), \otimes, k)$ des k-espaces vectoriels est une catégorie monoïdale symétrique.

Exemple 1.6. La catégorie $(\mathbf{Cob}(n), \amalg, \emptyset)$ est une catégorie monoïdale symétrique. Le produit ici est donné par l'union disjointe des variétés. L'ensemble vide $\emptyset$, vu comme $(n-1)$-variété, est l'objet neutre. La symétrie est donné par le *twist* τ défini pour deux $(n-1)$-variétés fermées M, N par $\tau_{M,N} : M \amalg N \to N \amalg M$.

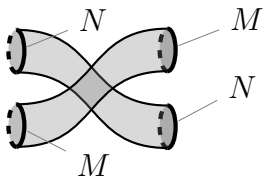


FIGURE 2 – Le twist $\tau_{M,N}$

Un **foncteur monoïdal symétrique** entre deux catégories monoïdales symétriques est un foncteur qui préserve ces structures. On peut à présent définir la notion de théorie des champs quantique et topologique.

1.3 Définition et premières propriétés

Définition 1.6. Soit k un corps. Une **théorie des champs quantique et topologique** de dimension $n \in \mathbb{N}$ (n-TCQT) est un foncteur monoïdal symétrique

$$F : \mathbf{Cob}(n) \to \mathbf{Vect}(k).$$

Explicitement, un tel foncteur associe
– à chaque $(n-1)$-variété fermée orientée M, un espace vectoriel $F(M)$,
– à chaque bordisme B entre deux variétés M et N, une application linéaire $F(B) : F(M) \to F(N)$.

De plus, on a des isomorphismes

$$F(\emptyset) \simeq k, \quad F(M \amalg N) \simeq F(M) \otimes F(N).$$

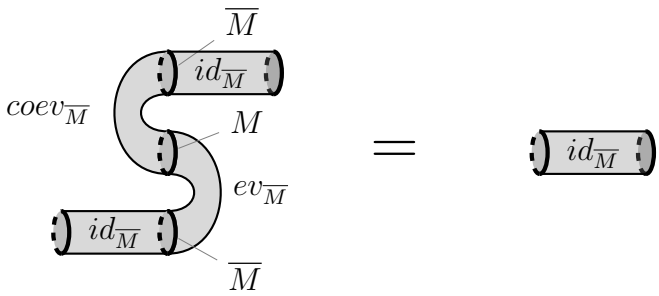
Remarque 1.4. Une n-variété fermée s'interprète comme un cobordisme entre l'ensemble vide (vu comme une $(n-1)$-variété) et lui-même. Ceci induit une application linéaire $k \to k$, autrement dit, c'est un scalaire.

Pour une TCQT, le foncteur est à valeurs dans la catégorie des k-espaces vectoriels, on va voir que les images des objets de $\mathbf{Cob}(n)$ sont nécessairement de dimension finie.

Proposition 1.1. *Soit F une TCQT de dimension m. Pour toute $(m-1)$-variété fermée, orientée M, l'espace vectoriel $F(M)$ est de dimension finie. De plus, on a un isomorphisme*

$$F(\overline{M}) \simeq F(M)^*.$$

Démonstration. On pose $V := F(M)$ et $U := F(\overline{M})$. On rappelle la décomposition en serpent du cylindre.



En appliquant le foncteur F, on obtient une application bilinéaire

$$\langle , \rangle := F(ev_{\overline{M}}) : U \otimes V \to k,$$

et une application linéaire

$$\gamma : F(coev_{\overline{M}}) : k \to V \otimes U$$

vérifiant

$$(\langle , \rangle \otimes \mathrm{id}_U) \circ (id_U \otimes \gamma) = id_U. \tag{1}$$

Comme $\gamma(1) \in V \otimes U$ il s'écrit $\gamma(1) = \sum_{i \in I} v_i \otimes u_i$ pour un ensemble fini I. L'égalité (1) implique que

$$\forall u \in U, \quad \sum_{i \in I} \langle u, v_i \rangle u_i = u. \tag{2}$$

Ainsi, l'espace vectoriel U est engendré par un nombre fini d'éléments $\{u_i\}_{i \in I}$, il est donc de dimension finie. En utilisant la décomposition en serpent de id_M on

trouve de même que V est de dimension finie.
Montrons à présent que l'application suivante est un isomorphisme

$$\begin{aligned} f: \quad & U \to V^* \\ & u \mapsto f_u := \langle u, _ \rangle \end{aligned}$$

f est injective car $\langle _, _ \rangle$ est non dégénérée. En effet, supposons qu'il existe $u \in U$ tel que $f_u = 0$ alors $\forall v \in V, \langle u, v \rangle = 0$. L'égalité (2) donne $u = 0$.
Pour la surjectivité, on raisonne par l'absurde.
Supposons que $r := \dim(Imf) < n := dim(V)$. Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de Imf que l'on complète en une base de V^*, $(f_1, \ldots, f_n)$. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V vérifiant

$$f_i(v_j) = \delta_{i,j}.$$

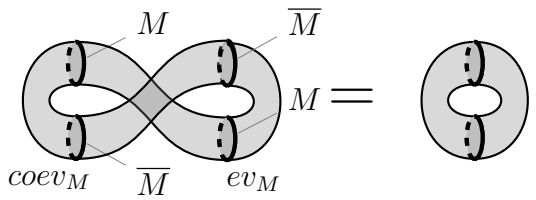
On trouve alors que $\forall u \in U, f_u(v_n) = 0$. Ceci contredit la non-dégénérescence de $\langle _, _ \rangle$. □

Par des arguments similaires, on démontre le résultat suivant.

Proposition 1.2. *Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, on a*

$$F(M \times S^1) = dim(F(M)).$$

Démonstration. Les variétés suivantes sont difféomorphes, elles induisent donc les mêmes morphismes dans $\mathbf{Cob}(m)$.



On pose $V := F(M)$, $U := F(\overline{M}) \simeq V^*$ et $f := F(M \times S^1)$. Puisque $f : k \to k$, il suffit de déterminer $f(1)$. En appliquant le foncteur F, on obtient une application bilinéaire non dégénérée

$$<,>:= F(ev_M) : V \otimes U \to k,$$

des applications linéaires

$$\gamma := F(coev_M) : k \to U \otimes V$$

et

$$\sigma := F(\tau_{\overline{M},M}) : U \otimes V \to V \otimes U.$$

Les applications sont inversées par rapport à la preuve précédente car on travaille avec ev_M, $coev_M$ et non pas avec $ev_{\overline{M}}$, $coev_{\overline{M}}$. On se donne $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V et $(u_1, \ldots, u_n)$ sa base duale dans U vérifiant

$$\langle v_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Posons $\gamma(1) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} u_i \otimes v_j$. Comme l'identité (2) de la preuve précédente, on montre que

$$\forall v \in V, \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \langle v, u_i \rangle v_j = v.$$

En particulier, en prenant les éléments de $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$, on trouve que $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, d'où $\gamma(1) = \sum_{1 \leq i \leq n} u_i \otimes v_i$.
Les applications linéaires définies ci-dessus vérifient

$$f(1) = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle v_i, u_i \rangle = n = \dim(V).$$

□

Remarque 1.5. Plus généralement, on peut remplacer $(\mathbf{Vect}(k), \otimes, k)$ par n'importe quelle catégorie monoïdale symétrique. On peut par exemple prendre celle des *espaces vectoriels gradués* $(\mathbf{grVect}(k), \otimes, k, \tau)$ on précise que le tressage n'est pas juste l'inversion des facteurs donnée jusqu'à présent

$$\tau_{v,w} : v \otimes w \to (-1)^{\deg v \deg w} w \otimes v.$$

1.4 En dimension 1

On a vu que les images par une TCQT sont des espaces vectoriels de dimension finie. En dimension 1, on peut énoncer un résultat réciproque. C'est un cas particulier de l'hypothèse du cobordisme.

Proposition 1.3. *Etant donnée un espace vectoriel V de dimension finie, on peut définir une 1-TCQT, F par $F(pt_+) = V$.*

Démonstration. Une théorie des champs quantique et topologique en dimension 1 est un foncteur entre $\mathbf{Cob}(1)$ et $\mathbf{Vect}$. Explicitons la catégorie $\mathbf{Cob}(1)$. Remarquons que ses objets sont engendrés par deux points : un orienté positivement pt_+ et un autre orienté négativement pt_-. En effet, une 0-variété compacte orientée M est une union disjointe de points munis d'une orientation. Ceci revient à se donner une décomposition de $M = M_+ \amalg M_-$ en une partie constituée de points orientés positivement et une autre de points orientés négativement. Pour définir une TCQT

F, on pose $F(pt_+) = V$ et $F(pt_-) = V^*$. Alors l'image par F d'une 0-variété M est isomorphe à

$$(\bigotimes_{m\in M_+} V) \otimes (\bigotimes_{m\in M_-} V^*).$$

Il faut à présent comprendre comment F agit sur les morphismes de **Cob**(1), les 1-variétés compactes. Puisqu'on travaille avec des catégories monoïdales symétriques, il suffit de regarder $F(B)$, pour B connexe. A difféomorphisme près, on est ramené aux cas suivants :

- $B = [0,1]$ vu comme bordisme de pt_+ vers lui même, alors $F(B) = id_V$,
- $B = [0,1]$, vu comme bordisme de pt_- vers lui même, alors $F(B) = id_{V^*}$,
- $B = [0,1]$ on le voit comme bordisme de $pt_+ \amalg pt_-$ vers l'ensemble vide, alors $F(B)$ est l'évaluation
$$\begin{array}{rl} ev: & V \otimes V^* \to k \\ & (v,\lambda) \mapsto \lambda(v) \end{array},$$
- $B = [0,1]$, on le voit comme bordisme de l'ensemble vide vers $pt_- \amalg pt_+$, alors $F(B)$ est l'application linéaire (avec $\{e_i\}$ une base de V)
$$\begin{array}{rccccc} coev: & k & \to & End(V) & \simeq & V^* \otimes V \\ & x & \mapsto & (x \mapsto x\,\mathrm{id}_V) & \mapsto & x \sum_{1\le i\le \dim(V)} e_i^* \otimes e_i \end{array},$$
- $B = S^1$, on le voit comme un bordisme de l'ensemble vide vers lui même. On a $F(B) = F(B \times pt_+) = \dim F(pt_+) = \dim(V)$.

□

En fait, les espaces vectoriels de dimension finie sont les éléments *dualisables* de la catégorie **Vect**. Cette notion sera détaillée par la suite (Partie 4.1).

Définition 1.7. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale symétrique. Un objet x de $\mathcal{C}$ est **dualisable** s'il existe un triplet $(\overline{x}, e, c)$, formé d'un objet $\overline{x}$ de $\mathcal{C}$, d'une **évaluation** $e : x \otimes \overline{x} \to \mathbf{1}$, d'une **coévaluation** $c : \mathbf{1} \to \overline{x} \otimes x$, tel que les compositions

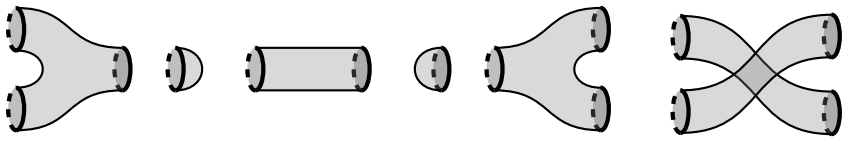
$$x \xrightarrow{\mathrm{id}_x \otimes c} x \otimes \overline{x} \otimes x \xrightarrow{e \otimes \mathrm{id}_x} x \quad \overline{x} \xrightarrow{c \otimes \mathrm{id}_{\overline{x}}} \overline{x} \otimes x \otimes \overline{x} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{x}} \otimes e} \overline{x}$$

soient l'identité.

1.5 En dimension 2

Afin de simplifier l'étude de ce cas, on va considérer le squelette de $\mathbf{Cob}(2)$, c'est à dire une sous-catégorie pleine avec un objet par classe d'isomorphisme. Remarquons que toute 1-variété fermée est difféomorphe à une union disjointe de cercles. On note $\mathbf{0}$ la 1-variété vide, $\mathbf{1}$ le cercle S^1 et $\mathbf{n}$ l'union disjointe de n cercles S^1. La sous-catégorie pleine $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots\}$ forme un squelette de $\mathbf{Cob}(2)$. Dorénavant, on identifiera ces deux catégories.
Comme en dimension 1, on va expliciter des générateurs de cette catégorie. Pour définir une 2-TCQT, il suffira alors de connaître leurs images.

Proposition 1.4. *La catégorie* ***Cob****(2) est engendrée par les six cobordismes suivants.*

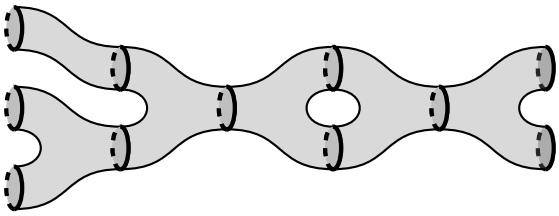


Autrement dit, tout cobordisme s'obtient par union disjointe ou recollement de ces éléments.

On se contentera d'esquisser une preuve (les détails sont donnés dans [Koc04]). Étant donné une 2-variété, connexe, compacte il suffit de trouver une variété difféomorphe, formée des générateurs donnés précédemment. On l'appellera *forme normale*. Pour cela, on utilise le résultat de classification suivant.

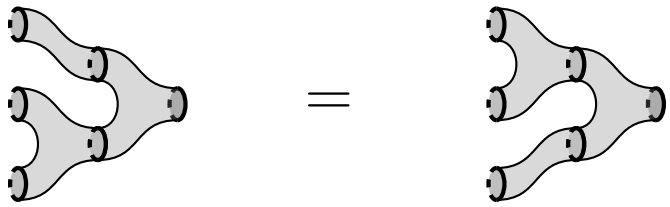
Proposition 1.5. *Deux variétés connexes, compactes et orientées sont difféomorphes si et seulement si elles ont même genre et le même nombre de bords entrants et sortants.*

Voici un exemple de forme normale pour une variété de genre 1 avec 3 bords entrants et 2 bords sortants.



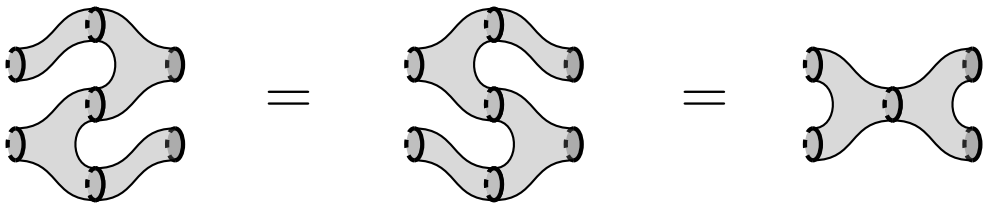
En utilisant de nouveau le résultat de classification, on démontre les relations suivantes.

Proposition 1.6. – *Associativité*



– *Commutativité*

– *Relation de Frobenius*



Il existe un certain nombre de relations concernant le twist, elles traduisent le fait que $(\mathbf{Cob}(2), \amalg, \emptyset)$ est une catégorie symétrique.
A présent, considérons F une 2-TCQT. Posons $F(\mathbf{1}) = A$, on sait déjà que

$$\begin{gathered}\mathbf{Cob}(2) \to \mathbf{Vect}\\ \mathbf{1} \mapsto A\\ \mathbf{n} \mapsto A^n\\ (\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}) \mapsto [\mathrm{id}_A : A \to A]\\ (\mathbf{1} \amalg \overline{\mathbf{1}} \Rightarrow \overline{\mathbf{1}} \amalg \mathbf{1}) \mapsto [\sigma : A^2 \to A^2]\end{gathered}$$

De plus, en évaluant le foncteur sur les générateurs, on définit des applications linéaires.

$$\begin{gathered}\mathbf{Cob}(2) \to \mathbf{Vect}\\ (\emptyset \Rightarrow \mathbf{1}) \mapsto [\eta : k \to A]\\ (\mathbf{1} \amalg \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1}) \mapsto [\mu : A^2 \to A]\\ (\mathbf{1} \Rightarrow \emptyset) \mapsto [tr : A \to k]\\ (\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{1} \amalg \mathbf{1}) \mapsto [\delta : A \to A^2]\end{gathered}$$

L'application μ munit l'espace vectoriel A d'une structure d'algèbre. De plus, les relations vérifiées par la catégorie $\mathbf{Cob}(2)$ induisent la commutativité et l'associativité du produit. En traduisant toutes les relations, A devient une *algèbre de Frobenius*.

Définition 1.8. Une **algèbre de Frobenius** commutative est une algèbre commutative A de dimension finie, munie d'une application linéaire appelée **trace**, $tr : A \to k$ telle que la forme bilinéaire $a \otimes b \to tr(ab)$ soit non dégénérée.

Réciproquement, étant donnée une algèbre de Frobenius commutative A, on peut définir une 2-TCQT. Il suffit de préciser l'image de chacun des générateurs.

Proposition 1.7. *On a une équivalence de catégories*

$$\textbf{\textit{2-TCQT}} \simeq \textbf{\textit{cFA}}$$

où ***cFA*** *est la catégorie des algèbres de Frobenius commutatives.*

Une classification des algèbres de Frobenius est donnée dans [Abr96]. Voici quelques exemples d'algèbres de Frobenius, lorsqu'elles sont commutatives, on peut définir une **2-TQFT**.

Exemple 1.7. Soit $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ un groupe fini avec pour élément neutre g_0. L'*algèbre de groupe* $k[G]$ est définie comme l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{0 \leq i \leq n} c_i g_i$ avec $c_i \in k$. On peut la munir de la trace suivante

$$\begin{aligned} tr : \quad & k[G] \to k \\ & g_i \mapsto \delta_{0,i}. \end{aligned}$$

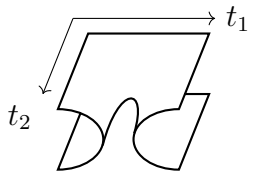
Lorsque G est abélien, $k[G]$ est munie d'une structure d'algèbre de Frobenius commutative.

Exemple 1.8. On va regarder un exemple dans $(\mathbf{grVect}(k), \otimes, k, \tau)$. Soit M une variété compacte, orientée de dimension n. On considère l'anneau de cohomologie $H^*(M) := \sum_{i=0}^{n} H^i(M)$ où le produit est le *cup produit* $\cup$. En utilisant la dualité de Poincaré, on montre que l'application bilinéaire associée est non dégénérée

$$H^*(M) \otimes H^*(M) \to k.$$

2 Catégories supérieures

La définition de TQFT que nous avons donnée ne permet pas de considérer tous les cas. Par exemple, la variété suivante n'appartient pas à la catégorie $\mathbf{Cob}(2)$.



Au lieu de voir la variété comme une évolution au cours du temps comme on pouvait le faire jusqu'à présent, on va considérer deux axes de temps $t_1, t_2 \in [0,1]$. Aux quatre coins de la variété se trouve la 0-variété X constituée de deux points. Au temps $t_2 = 0$, le long de l'axe t_1 on trouve le bordisme associé à l'identité, Y_0. Au temps $t_2 = 1$, la 1-variété Y_1 est formée de l'évaluation suivie de la coévaluation. L'évolution le long de l'axe t_2 est un 2-bordisme W entre Y_0 et Y_1. La situation peut être résumée par ce diagramme.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "Y_0"] \arrow[r, bend right, "Y_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow W"] & X \end{tikzcd}$$

La variété en forme de selle fait partie d'une *2-catégorie*, il s'agit d'une catégorie enrichie sur les catégories. En plus des morphismes $f, g : x \to y$ définis entre les objets x, y, il y a des *2-morphismes* $H : f \Rightarrow g$ entre les morphismes.
On se contente pour l'instant d'une approche informelle. On peut construire une 2-catégorie $\mathbf{Cob}_2(2)$ dont les objets sont les 0-variétés compactes, les 1-morphismes sont les 1-bordismes et les 2-morphismes sont les 2-bordismes. Plus généralement, on définit $\mathbf{Cob}_k(n)$ une k-catégorie dont les objets sont les $(n-k)$-variétés fermées, les 1-morphismes les $(n-k+1)$-bordismes et ainsi de suite jusqu'au k-morphismes, des n-variétés.

2.1 Première tentative de définition

Nous présentons ici une première définition des catégories supérieures, mais nous verrons que cette approche n'est pas adaptée à notre contexte.

Définition 2.1. Une 1-catégorie stricte est une catégorie.
Pour $n > 1$, une **n-catégorie stricte** $\mathcal{C}$ est une catégorie enrichie sur les $(n-1)$-catégories strictes, c'est à dire que c'est la donnée d'un ensemble d'objets et que pour tous objets $X, Y \in \mathcal{C}$, on dispose d'une $(n-1)$-catégorie $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. De plus, ces catégories sont munies d'une loi de composition unitaire et associative. En particulier, pour tous $W, X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{C}}(W,X) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \arrow[r, "c_{W,X,Y} \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times c_{X,Y,Z}"] & Hom_{\mathcal{C}}(W,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \arrow[d, "c_{W,Y,Z}"] \\ Hom_{\mathcal{C}}(W,X) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[r, "c_{W,X,Z}"] & Hom_{\mathcal{C}}(W,Z) \end{tikzcd}$$

est commutatif où $c_{X,W,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(W,X) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(W,Y)$ est la composée entre morphismes.

Cette définition, simple à énoncer, est trop rigide. La composée des bordismes vue en première partie est associative à isomorphisme près. On peut tenter d'assouplir nos conditions en demandant l'existence pour tous $W, X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$ d'un isomorphisme

$$\alpha_{W,X,Y,Z} : c_{W,X,Z} \circ (\mathrm{id} \times c_{X,Y,Z}) \simeq c_{W,Y,Z} \circ (c_{W,X,Y} \times \mathrm{id}).$$

Mais cette famille d'isomorphismes $\{\alpha_{W,X,Y,Z}\}_{W,X,Y,Z \in Obj(\mathcal{C})}$ doit également vérifier une condition d'associativité, à isomorphisme près de nouveau. Énoncer toutes les conditions devient vite fastidieux. On voit dès à présent les limites de nos modèles. D'une part, on dispose d'une définition simple par induction mais inadaptée et de l'autre une définition correcte mais moins évidente à énoncer.
Regardons de plus près les cas $n = 2, 3$. On donne une version faible de la notion de 2-catégorie.

Définition 2.2. Une **bicatégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée de

- une collection d'objets,
- pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$, une catégorie $\mathcal{C}(X, Y)$,
- un foncteur $\begin{array}{rl} c_{X,Y,Z} : & \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z) \\ & (g, f) \mapsto f \circ g, \end{array}$
- un 1-morphisme distingué $\mathbf{1}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ pour chaque $X \in Obj(\mathcal{C})$,
- des isomorphismes naturels

$$\begin{array}{c} a : (- \circ -) \circ - \to - \circ (- \circ -) \\ l : \mathbf{1} \circ - \to - \\ r : - \circ \mathbf{1} \to - \end{array}$$

tels que les digrammes suivants commutent.

– **identité du triangle**

$$\begin{tikzcd} (f \circ \mathbf{1}_X) \circ g \arrow[rr, "a_{f,\mathbf{1}_X,g}"] \arrow[dr, "r_f \circ \mathrm{id}_g"'] & & f \circ (\mathbf{1}_X \circ g) \arrow[dl, "\mathrm{id}_f \circ l_g"] \\ & f \circ g & \end{tikzcd}$$

– **identité du pentagone**

$$\begin{tikzcd} & (f \circ g) \circ (h \circ k) \arrow[dr, "a_{f,g,h\circ k}"] & \\ ((f \circ g) \circ h) \circ k \arrow[ur, "a_{f\circ g,h,k}"] \arrow[d, "a_{f,g,h} \circ \mathrm{id}_h"] & & (f \circ (g \circ (h \circ k))) \\ (f \circ (g \circ h)) \circ k \arrow[rr, "a_{f,g\circ h,k}"] & & f \circ ((g \circ h) \circ k) \arrow[u, "\mathrm{id}_f \circ a_{g,h,k}"'] \end{tikzcd}$$

Exemple 2.1. La catégorie des petites catégories $\boldsymbol{Cat}$ peut être vue comme une 2-catégorie avec :

- pour objets les petites catégories,
- pour 1-morphismes les foncteurs entre petites catégories,
- pour 2-morphismes les transformations naturelles entre foncteurs.

Exemple 2.2. Soit k un corps. Alg_k est un bicatégorie dont les objets sont les k-algèbres, les 1-morphismes sont des bimodules et les 2-morphismes sont les morphismes entre bimodules. La composée d'un AB-bimodule M et d'un BC-bimodule N est le $A-C$-bimodule, donné par le produit tensoriel $M * N := M \otimes_B N$.

Exemple 2.3. Soit X un espace topologique. Le **2-groupoïde fondamental** $\Pi_{\leq 2}X$ est une bicatégorie où :

- les objets sont les points de X,
- les 1-morphismes sont les chemins entre points,
- les 2-morphismes sont les classes d'équivalence d'homotopie entre chemins.

On peut continuer le processus en considérant les homotopies d'homotopies comme 3-morphismes et ainsi de suite. On définit alors le n-groupoïde fondamental $\Pi_{\leq n}X$ dont les n-morphismes sont les classes d'équivalence d'homotopie entre les $(n-1)$-morphismes. On peut même faire tendre n vers l'infini et obtenir le ∞-groupoïde fondamental $\Pi_{\leq \infty}X$.

Remarquons que la définition d'une catégorie monoïdale (Déf 1.5) ressemble fortement à celle ci, en fait, il s'agit d'un cas particulier.

Exemple 2.4. Soit une bicatégorie $\mathcal{A}$ avec un unique objet $*$, alors $\mathcal{C} = Hom_{\mathcal{A}}(*,*)$ est un catégorie monoïdale. Inversement, soit $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale. On lui associe une bicatégorie $B\mathcal{C}$ telle que :

- $B\mathcal{C}$ possède un unique objet $*$,
- la catégorie des 1-morphismes $Hom_{B\mathcal{C}}(*,*) = \mathcal{C}$,
- la composition dans $Hom_{B\mathcal{C}}(*,*)$ est donné par $\otimes$.

On peut montrer que les notions de 2-catégories strictes et bicatégories sont équivalentes [Lei98]. En revanche, ceci n'est plus vrai pour $n = 3$. Une façon de le voir est de procéder comme dans l'exemple ci-dessus. On peut montrer [BD95] que

- une 3-catégorie stricte avec un objet, un 1-morphisme est une catégorie monoïdale symétrique stricte,
- une 3-catégorie faible avec un objet, un 1-morphisme est une catégorie monoïdale tressée.

Or, ces deux notions ne sont pas équivalentes.

Revenons aux cobordismes. On peut aussi étendre la catégorie $\mathbf{Cob}_n(n)$ en lui rajoutant des $(n+1)$-morphismes, des $(n+2)$-morphismes ... Étant donnée deux n-bordismes W_0, W_1, un $(n+1)$-morphismes est un difféomorphisme $\phi : W_0 \to W_1$ préservant les "données de bord". Un n-morphisme est un bordisme entre des $(n-1)$-morphismes, qui sont eux-mêmes des bordismes entre des $(n-2)$-morphismes et ainsi de suite, on souhaite que toutes ces données implicites soit préservées par ϕ. On définit ensuite un $(n+2)$ morphisme comme étant une isotopie entre deux difféomorphismes, en demandant de nouveaux que les données de bord soit préservées.
On peut continuer ainsi en obtenant des k-morphismes $\forall k > n$, on a alors une ∞-*catégorie*. Plus exactement, il s'agit d'une (∞, n)-*catégorie* car les k-morphismes sont inversibles pour $k > n$.

2.2 Modèle pour les $(\infty, 1)$-catégories

Avec la terminologie introduite ci-dessus, le ∞-groupoïde fondamental d'un espace topologique X doit être une $(\infty, 0)$-catégorie.
Un des principes que doit vérifier une bonne théorie des catégories supérieures est l'*hypothèse de l'homotopie*, elle est présentée en 1983 dans [Gro83] .

> *La construction $X \to \Pi_{\leq \infty} X$ établit une bijection entre les espaces topologiques (à équivalence homotopique faible près) et les $(\infty, 0)$-catégories (à équivalence près).*

Remarque 2.1. Plus généralement, on peut demander que la construction $X \to \Pi_{\leq n} X$ établisse une bijection entre les espaces topologiques de *type* n (ceux dont les groupes d'homotopie $\pi_k(X, x)$ sont nuls pour $k > n$ et tout $x \in X$) et les n-groupoïdes.

Dans toute la suite, on prend la convention suivante.

Définition 2.3. Une $(\infty, 0)$**-catégorie** est un espace topologique.

Cette définition concorde bien avec nos attentes. En effet, étant donné un espace topologique X, on peut l'interpréter comme une $(\infty, 0)$-catégorie dont les objets sont les points, les 1-morphismes sont les chemins entre les objets, les 2-morphismes sont les homotopies entre chemins et ainsi de suite.

On considère $\mathcal{C}$ une $(\infty, 1)$-catégorie, en supposant que cette notion soit bien définie on va essayer de trouver une structure équivalente qui servira de modèle.

Construction 2.1. On peut extraire de $\mathcal{C}$ une $(\infty, 0)$-catégorie X_0 dont :

- les objets sont ceux de $\mathcal{C}$,
- les 1-morphismes sont les 1-morphismes inversibles de $\mathcal{C}$,
- les 2-morphismes sont les 2 morphismes entre les 1-morphismes inversibles de $\mathcal{C}$,
- ...

On perd de l'information sur les 1-morphismes non inversibles de $\mathcal{C}$. On peut identifier les morphismes de $\mathcal{C}$ avec les foncteurs $[1] \to \mathcal{C}$ où $[1]$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonnée $\{0 < 1\}$. L'ensemble de ces foncteurs $Fun([1], \mathcal{C})$ forment une nouvelle $(\infty, 1)$-catégorie et comme précédemment on en extrait X_1 une $(\infty, 0)$-catégorie. Les espaces topologiques X_0, X_1 ne contiennent aucune donnée sur la composition des 1-morphismes de $\mathcal{C}$, on va donc itérer le processus. Considérons les paires de 1-morphismes composables, elles peuvent être identifiées à des foncteurs $[2] \to \mathcal{C}$. Plus généralement, on considère l'$(\infty, 1)$-catégorie $Fun([n], \mathcal{C})$ et on en extrait X_n une $(\infty, 0)$-catégorie.

Les espaces topologiques $\{X_n\}_{n \geq 0}$ sont naturellement organisés en espace simplicial $X_\bullet$. En effet, X_n dépend de façon fonctorielle de $[n]$. Étant donné un morphisme $f : [n] \to [m]$, en composant avec f, on définit un foncteur entre $Fun([m], \mathcal{C})$ et $Fun([n], \mathcal{C})$ et donc entre X_m et X_n.
Cette construction ressemble à celle du nerf d'une catégorie que nous rappelons.

Définition 2.4. Le **nerf** d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ est l'ensemble simplicial $N(\mathcal{C})_\bullet$ défini par $N(\mathcal{C})_n = Fun([n], \mathcal{C})$.

Autrement dit, l'ensemble $N(\mathcal{C})_n$ est l'ensemble de n morphismes composables

$$C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} C_n.$$

La catégorie $\mathcal{C}$ est déterminée par son nerf $N(\mathcal{C})_\bullet$ à isomorphisme près. En effet, les objets de $\mathcal{C}$ sont les éléments de $N(\mathcal{C})_0$ et les morphismes de $\mathcal{C}$ sont les éléments de $N(\mathcal{C})_1$. Il ne reste plus que les données concernant la composition des morphismes à récupérer.

Notation 2.1. Pour toute famille $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n$, on définit

$$\begin{aligned} p_{i_0, i_1, \dots, i_m} : \quad & [m] \to [n] \\ & j \mapsto i_j \end{aligned}$$

et pour tout ensemble simplicial $X_\bullet$, on note $p^*_{i_0, i_1, \dots, i_m} : X_n \to X_m$ l'application associée.

Pour le nerf $N(\mathcal{C})_\bullet$, on a un carré cartésien dans **Sets**, la catégorie des ensembles :

$$\begin{tikzcd} N(\mathcal{C})_2 \arrow[r, "p_{0,1}^*"] \arrow[d, "p_{1,2}^*"] & N(\mathcal{C})_1 \arrow[d, "p_1^*"] \\ N(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "p_0^*"] & N(\mathcal{C})_0. \end{tikzcd}$$

Le diagramme induit un isomorphisme avec le produit fibré

$$\phi : N(\mathcal{C})_2 \to N(\mathcal{C})_1 \times_{N(\mathcal{C})_0} N(\mathcal{C})_1.$$

Une paire de morphismes composables $f : C \to D$ et $g : D \to E$ peut être identifiée à un élément (f, g) de $N(\mathcal{C})_1 \times_{N(\mathcal{C})_0} N(\mathcal{C})_1$. La composée $g \circ f$ est donnée par $p_{0,2}^* \phi^{-1}(f, g) \in N(\mathcal{C})_1$.

Nous verrons que l'espace simplicial $X_\bullet$ dont la construction rappelle celle du nerf, vérifie une propriété similaire.

Définition 2.5. Soient $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues entre espaces topologiques. Le **produit fibré homotopique** $X \times_Z^h Y$ est l'espace topologique

$$X \times_Z Z^{[0,1]} \times_Z Y := \{(x, y, p) \in X \times Y \times Z^{[0,1]} : p \textit{ continue et } p(0) = f(x), p(1) = g(y)\}$$

Remarque 2.2. Il existe une application canonique entre le produit fibré et le produit fibré homotopique

$$\begin{gathered} X \times_Z Y \to X \times_Z^h Y \\ (x, y) \to (x, y, p) \end{gathered}$$

où p est le chemin constant valant $f(x) = g(y)$.

Définition 2.6. Un diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

est un **carré cartésien homotopique** si la composée suivante est une équivalence faible homotopique

$$W \to X \times_Z Y \to X \times_Z^h Y.$$

Définition 2.7. Un espace simplicial $X_\bullet$ est un **espace Segal** si $\forall m, n \in \mathbb{N}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{m+n} \arrow[r, "p^*_{0,1,\dots,m}"] \arrow[d, "p^*_{m,m+1,\dots,m+n}"'] & X_m \arrow[d, "p^*_m"] \\ X_n \arrow[r, "p^*_0"] & X_0 \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien homotopique.

Remarque 2.3. Soit $m \geq 1$, on considère les applications

$$\begin{aligned} g_i : \quad & [1] \to [m] \\ & 0 \mapsto i-1 \\ & 1 \mapsto i. \end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence, on voit qu'être un espace de Segal revient à exiger que pour tout $m \geq 1$ l'application

$$X_m \to X_1 \times^h_{X_0} \dots \times^h_{X_0} X_1$$

induite par les g_i soit une équivalence faible homotopique.

Pour revenir à l'espace simplicial $X_\bullet$ que l'on a extrait de l'$(\infty, 1)$-catégorie, on peut supposer qu'il s'agit d'un espace de Segal. En effet, ceci sous-entend que se donner une suite de morphismes composables

$$C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} C_n$$

est équivalent à la donnée de deux suites

$$C_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_m} C_m, \quad C_m \xrightarrow{f_{m+1}} \dots \xrightarrow{f_n} C_n.$$

Ainsi, on vient de voir qu'à toute $(\infty, 1)$-catégorie, on peut associer un espace de Segal, montrons qu'il s'agit d'une équivalence.

Construction 2.2. Soit $X_\bullet$, un espace de Segal, tentons de définir une $(\infty, 1)$-catégorie $\mathcal{C}$.

- Les objets de $\mathcal{C}$ sont les points de l'espace topologique X_0.
- Soient $x, y \in X_0$, l'ensemble des morphismes $Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ est donné par le produit fibré homotopique itéré $\{x\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{y\}$ obtenu comme produit fibré homotopique du diagramme

$$\begin{tikzcd} \{x\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{y\} \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d, "(d_0;d_1)"] \\ \{x\} \times \{y\} \arrow[r] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd}$$

  où d_0, d_1 désignent les application de faces.

– Pour $x, y, z \in X_0$, la composition

$$Hom_{\mathcal{C}}(x,y) \times Hom_{\mathcal{C}}(y,z) \to Hom_{\mathcal{C}}(x,z)$$

s'obtient par la composée

$$\begin{array}{rcl} (\{x\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{y\}) \times (\{y\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{z\}) & \to & \{x\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{z\} \\ & \simeq & \{x\} \times^h_{X_0} X_2 \times^h_{X_0} \{z\} \\ & \to & \{x\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{z\}. \end{array}$$

– L'associativité de la composition découle des équivalences faibles homotopiques $X_1 \times^h_{X_0} X_2 \leftarrow X_3 \to X_2 \times^h_{X_0} X_1$.
– En ce qui concerne l'identité, les égalités découlent des équivalences faibles homotopiques $X_1 \times^h_{X_0} X_0 \leftarrow X_1 \to X_0 \times^h_{X_0} X_1$.

Toutefois, les deux constructions ne sont pas inverses l'une de l'autre. En effet, considérons une petite catégorie $\mathcal{C}$, en munissant les ensembles $N(\mathcal{C})_n$ de la topologie discrète, le nerf $N(\mathcal{C})_\bullet$ est un espace de Segal. En lui appliquant la construction présentée ci-dessus, on retrouve la catégorie $\mathcal{C}$. Cependant, l'espace de Segal $X_\bullet$ associé à $\mathcal{C}$ ne coïncide pas avec $N(\mathcal{C})_\bullet$.

Construction 2.3. Nous allons donc raffiner la construction précédente, en considérant hX, la catégorie **homotopique** de $X_\bullet$:

– Les objets de sont les points de l'espace topologique X_0.
– Soient $x, y \in X_0$, $Hom_{hX}(x,y)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs

$$\pi_0(\{x\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{y\}).$$

En appliquant cette construction à des espaces de Segal différents on peut retrouver une même catégorie. Soit, $Y_\bullet$ un espace de Segal, en utilisant la construction 2.3, on obtient une $(\infty,1)$-catégorie $\mathcal{C}$. En appliquant la construction 2.1, on peut extraire de $\mathcal{C}$, un espace de Segal $X_\bullet$. On rappelle que l'$(\infty,0)$-catégorie X_0 s'obtient en retirant les 1-morphismes non inversibles de $\mathcal{C}$. On peut définir une application de Y_0 vers X_0 mais ce n'est pas nécessairement une équivalence. Il se peut qu'un 1-morphisme inversible de $\mathcal{C}$ ne soit pas obtenu à partir d'un chemin de Y_0.

Définition 2.8. Soit $X_\bullet$ un espace de Segal et $f \in X_1$. Soit $x = d_0(f)$ et $y = d_1(f)$. La composée

$$\{f\} \to \{x\} \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} \{y\} \to \{x\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{y\}$$

définit un morphisme $\overline{f} \in Hom_{hX}(x,y) = \pi_0(\{x\} \times^h_{X_0} X_1 \times^h_{X_0} \{y\})$. f est **inversible** si $\overline{f}$ est un isomorphisme dans hX.

Exemple 2.5. L'application $[1] \xrightarrow{} [0]$ induit la dégénérescence $s_0 : X_0 \to X_1$. Pour tout $x \in X_0$ le morphisme $s_0(x)$ coïncide avec $\mathrm{id}_x : x \to x$ dans hX. Ainsi, $s_0(x)$ est inversible pour tout $x \in X_0$.

Définition 2.9. Soit $X_\bullet$ un espace de Segal et $Z \subset X_1$ l'ensemble des éléments inversibles. $X_\bullet$ est un espace de Segal **complet** si $s_0 : X_0 \to Z$ est une équivalence homotopique faible.

Soit $Y_\bullet$ un espace de Segal et $\mathcal{C} = hY$. Si on suppose de plus que $Y_\bullet$ est complet, alors on peut identifier l'espace topologique Y_0 avec la $(\infty, 0)$-catégorie extraite de $\mathcal{C}$ en retirant les 1-morphismes non inversibles. On a donc établi une correspondance entre les espaces de Segal complets et ce qu'on attend d'une $(\infty, 1)$-catégorie, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 2.10. Une $(\infty, 1)$-catégorie est un espace de Segal complet.

Remarque 2.4. Tout espace de Segal peut être *complété* en un espace de Segal complet, en utilisant, par exemple, les constructions présentées précédemment. Il existe même un foncteur ***Comp*** qui à un espace de Segal associe un espace de Segal complet [Rez01].

Il existe d'autres définitions d'une $(\infty, 1)$-catégorie qui sont équivalentes [Ber10].

2.3 Modèle pour les (∞, n)-catégories

Dans cette sous-partie, on va généraliser l'approche précédente afin de définir une (∞, n)-catégorie. Commençons par une extension de la notion d'objet simplicial.

Définition 2.11. Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{C}$ une catégorie. Un **objet simplicial à n-feuillets** de $\mathcal{C}$ est un foncteur

$$(\Delta^{op})^n := \Delta^{op} \times \ldots \times \Delta^{op} \to \mathcal{C}.$$

On note $\mathcal{C}^n$ la catégorie des objets simpliciaux à n-feuillets.

Remarque 2.5.
- Un objet simplicial à n-feuillets définit une collection d'objets $X_{k_1,\ldots,k_n}$ avec $k_i \in \mathbb{N}$.
- Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on a une équivalence de catégories

$$(\mathcal{C}^m)^n \simeq \mathcal{C}^{m+n}.$$

  En particulier, on identifie les objets simpliciaux à n-feuillets de $\mathcal{C}$ avec les objets simpliciaux $X_\bullet$ de $\mathcal{C}^{n-1}$.

– On parle d'espace simplicial à n-feuillets si $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, la catégorie des espaces topologiques.

Il nous faut des notions supplémentaires pour pouvoir parler d'espace de Segal à n-feuillets.

Définition 2.12. – Une application $X \to Y$ d'espaces simpliciaux à n-feuillets est une **équivalence homotopique faible** si les applications induites $X_{k1,\ldots,k_n} \to Y_{k_1,\ldots,k_n}$ sont des équivalences homotopiques faibles d'espaces topologiques pour tout $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.

– Un diagramme d'espaces simpliciaux à n-feuillets est un **carré cartésien homotopique**

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

si pour tout $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} W_{k_1,\ldots,k_n} \arrow[r] \arrow[d] & X_{k_1,\ldots,k_n} \arrow[d] \\ Y_{k_1,\ldots,k_n} \arrow[r] & Z_{k_1,\ldots,k_n} \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien homotopique d'espaces topologiques.

– Un espace simplicial à n-feuillets X est **essentiellement constant** s'il existe une équivalence homotopique faible d'espaces simpliciaux $Y \to X$ avec Y un foncteur constant.

Nous sommes à présent en mesure de définir une généralisation de la notion d'espace de Segal complet.

Définition 2.13. Soit X un espace simplicial à n-feuillets, $n \in \mathbb{N}$. On interprète X comme un objet simplicial $X_\bullet$ dans la catégorie $\mathbf{Top}^{n-1}$. On dit que X est un **espace de Segal à n-feuillets** s'il vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $0 \leq k \leq m$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r] \arrow[d] & X_k \arrow[d] \\ X_{m-k} \arrow[r] & X_0 \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien homotopique d'espaces simpliciaux à (n-1)-feuillets.

2. L'espace simplicial à $(n-1)$-feuillets X_0 est essentiellement constant.
3. Chaque X_k est un espace de Segal à $(n-1)$-feuillets.

De plus, l'espace de Segal à n-feuillets est **complet** s'il vérifie les conditions :

4. Chaque X_k est complet.
5. L'espace simplicial $Y_\bullet$, donné par $Y_k = X_{k,0,\dots,0}$, est un espace de Segal complet.

Les espaces de Segal à n-feuillets sont définis par récurrence mais on peut également donner une description explicite.

Définition 2.14. Un **espace de Segal à n-feuillets** est un espace simplicial à n-feuillets $X = X_{\bullet,\dots,\bullet}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall 1 \leq i \leq n, \forall k_1, \dots, , k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n \geq 0,$

$$X_{k_1,\dots,,k_{i-1},\bullet,k_{i+1},\dots,k_n}$$

   est un espace de Segal
2. $\forall 1 \leq i \leq n, \forall k_1, \dots, , k_{i-1} \geq 0$, l'espace simplicial à $(n-i)$-feuillets

$$X_{k_1,\dots,,k_{i-1},0,\bullet,\dots,\bullet}$$

   est essentiellement constant.

De plus, l'espace de Segal à n-feuillets est **complet** si

3. $\forall 1 \leq i \leq n, \forall k_1, \dots, , k_{i-1} \geq 0,$

$$X_{k_1,\dots,,k_{i-1},\bullet,0,\dots,0}$$

   est un espace de Segal complet.

On note Seg la catégorie des espaces de Segal à n-feuillets.

Voyons à présent comment cette définition coïncide avec ce que l'on attend d'une (∞, n)-catégorie $\mathcal{C}$.
On rappelle que pour un espace de Segal $Y_\bullet$, on a une équivalence homotopique faible pour tout $m \geq 1$,

$$Y_m \to Y_1 \times^h_{Y_0} \dots \times^h_{Y_0} Y_1$$

Dans un espace de Segal à n-feuillets, on peut composer les morphismes le long de n directions (ou axe de temps). Les objets de $\mathcal{C}$ sont les points de $X_{0,\dots,0}$. Les i-morphismes de la catégorie sont les éléments de $X_{1,\dots,1,0,\dots,0}$. Grâce à la première condition, un élément de $X_{k_1,\dots,k_n}$ s'interprète comme la composée de k_i morphismes le long de la i^{e} direction.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Afin de comprendre à quoi correspond la 2^e^condition, regarder le cas $n = 2$. Un 2-morphisme d'une 2-catégorie peut être représenté par le diagramme

La flèche du haut (respectivement, du bas) représente la source (respectivement, le but) du 2-morphisme. On notera que ce sont des 1-morphismes entre les mêmes objets.

On retrouve quelque chose de similaire dans un espace de Segal à 2-feuillets,$X_{\bullet,\bullet}$. En effet, un élément de $X_{1,1}$ est un 2-morphisme, on peut le représenter par le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\in X_{1,0}"] \arrow[d, dashed, "\in X_{0,1} \simeq X_{0,0}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[d, dashed, "\in X_{0,1} \simeq X_{0,0}"] \\ \bullet \arrow[r, "\in X_{1,0}"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Les sommets sont des éléments de $X_{0,0}$. Les flèches horizontales sont des éléments de $X_{1,0}$, des 1-morphismes entre des points de $X_{0,0}$. Elles traduisent une évolution dans la première direction. Les transformations dans la deuxième direction sont données par des éléments de $X_{0,1}$. Or, comme $X_{0,\bullet}$ est essentiellement constant, on a une équivalence homotopique faible $X_{0,0} \simeq X_{0,1}$. A homotopie près, les flèches horizontales sont des 1-morphismes entre les mêmes objets.

Définition 2.15. Une (∞, n)-catégorie est un espace de Segal complet à n-feuillets.

Remarque 2.6. Soit $X_{\bullet,\ldots,\bullet}$ un espace de Segal à n-feuillets. En appliquant le foncteur de complétion $\boldsymbol{Comp}$ de façon itérative, on obtient un espace de Segal complet à n-feuillets.

Remarque 2.7. On peut munir une (∞, n)-catégorie d'une structure monoïdale symétrique. Les détails sont donnés dans [CS19].

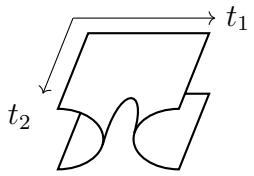
Remarque 2.8. On aurait pu procéder différemment en définissant une $(\infty, 0)$-catégorie comme étant un complexe de Kan. C'est l'approche que nous allons adopter dans la partie suivante. On peut reproduire la démarche développée jusqu'ici en remplaçant les espaces topologiques par des complexes de Kan. Dorénavant, un espace simplicial désignera un objet simplicial dans la catégorie des complexes de Kan.

3 L'(∞, n)-catégories des bordismes

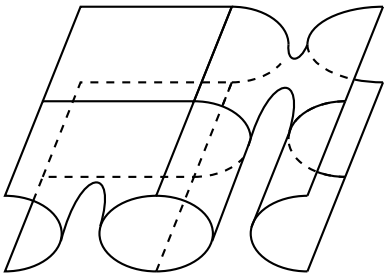
Le but de cette partie est de définir une (∞, n)-catégorie de bordismes $Bord_n$, on l'obtient en complétant un espace de Segal à n-feuillets $PBord_n$.
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. On va considérer l'ensemble simplicial à n-feuillets $PBord_n^V$ dont les éléments sont des sous-variétés de dimension n contenues dans $V \times \mathbb{R}^n$. $PBord_n$ sera obtenue comme limite inductive en faisant varier V dans l'ensemble des espaces vectoriels de dimension finie (c'est à dire la colimite obtenue le long des inclusions $V \subset V \oplus \mathbb{R} \subset V \oplus \mathbb{R}^2 \subset \ldots$).
Le théorème de Whitney permet de s'assurer qu'on a pris en compte toutes les variétés de dimension n.

Théorème (Whitney)**.** *Si M est une variété lisse de dimension n, il existe un plongement lisse $M \to \mathbb{R}^{2n}$.*

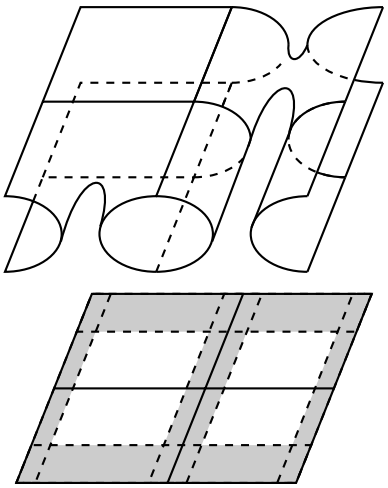
Commençons par expliquer ce que l'on attend d'une telle catégorie. Un élément de $(PBord_n^V)_{1,\ldots,1}$ est une variété avec n axes de temps. De plus, dans chacune des directions, son bord se décompose en une partie entrante et une partie sortante. Voici un exemple pour $n = 2$.



Un élément de $(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n}$ est également une variété avec n axes de temps, il s'obtient comme composée de k_i morphismes le long de la i^{e} direction. Voici un exemple pour $n = 2$ et $k_1 = k_2 = 2$.



La variété est plongée dans un espace vectoriel $V \times \mathbb{R}^n$ pour représenter les n-axes de temps. Afin de repérer les "coupures" où se recollent les bordismes, on place une "grille" sur les différentes directions. En pratique, on s'intéresse à des intervalles autour de la grille, ce qui revient à regarder des colliers de variétés.



3.1 Intervalles

On va définir proprement ce que l'on appelait grille ci-dessus en construisant un espace de Segal $Int_\bullet$. Comme expliqué à la remarque 2.8, dorénavant nous allons considérer des complexes de Kan et non plus des espaces topologiques.
$Int_\bullet$ dispose d'une structure *simpliciale* (donnée par les dégénérescences et les faces entre ses niveaux) mais également d'une structure *spatiale* (puisque chaque niveau Int_k est un complexe de Kan). Décrivons tout d'abord cette seconde structure.
Les 0-simplexes de Int_0 sont les paires

$$\mathfrak{Int}_0 = \{(a,b) : a < b\} \subset \mathbb{R}^2.$$

On identifie un élément $(a,b) \in \mathfrak{Int}_0$ avec l'intervalle $[a,b]$.
Soit $m \in \mathbb{N}$, les m-simplexes de l'ensemble simplicial Int_0 sont les paires d'applications lisses $a, b : |\Delta^m|_e \to \mathbb{R}$ telles que $a(x) \leq b(x),\ \forall x \in |\Delta^m|_e$. Un m-simplexe s'interprète comme un ensemble d'intervalles, on le note $(I(x))_{x\in|\Delta^m|_e}$ ou encore $(a(x), b(x))_{x\in|\Delta^m|_e}$.
$\mathfrak{Int}_0$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, prendre les simplexes lisses fait de Int_0 un complexe de Kan (d'après le corollaire 4.36 de [CW14]).
Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathfrak{Int}_k = \{(\underline{a}, \underline{b}) = (a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_k) : a_i < b_i;\ a_{i-1} \leq a_i,\ b_{i-1} \leq b_i\} \subset \mathbb{R}^{2k}.$$

On interprète les éléments comme des $(k+1)$-uplets d'intervalles ordonnés $\underline{I} = I_0 \leq \ldots \leq I_k$. Comme précédemment, en prenant les simplexes lisses, on définit le complexe de Kan Int_k. Un m-simplexe sera noté $(I_0(x) \leq \ldots \leq I_k(x))_{x\in|\Delta^k|_e}$.

Notation 3.1. Soit $f : [m] \to [l]$ un morphisme de la catégorie simpliciale $\mathbf{\Delta}$. Il induit une application entre les simplexes standards étendus $|f| : |\Delta^m|_e \to |\Delta^l|_e$. On note f^Δ, l'application qui envoie les l-simplexes sur les m-simplexes de Int_k :

$$f^\Delta : (I_0(x) \leq \ldots \leq I_k(x))_{x \in |\Delta^l|_e} \to \Big(I_0\big(|f|(x)\big) \leq \ldots \leq I_k\big(|f|(x)\big)\Big)_{x \in |\Delta^m|_e}.$$

Les applications faces et dégénérescences *spatiales* d_j^Δ, s_j^Δ sont celles induites par les cofaces δ^j et les codégénérescences σ^j (Notation A.1).

Regardons à présent la structure simpliciale de $Int_\bullet$. Étant donné un morphisme $g : [k] \to [l]$ de la catégorie simpliciale $\mathbf{\Delta}$, on dispose d'une application

$$\begin{aligned} g^* : \quad & Int_l \to Int_k \\ & (I_0(x) \leq \ldots \leq I_l(x))_{x \in |\Delta^m|_e} \to I_{g(0)}(x) \leq \ldots \leq I_{g(k)}(x))_{x \in |\Delta^m|_e}. \end{aligned}$$

Les applications faces et dégénérescences *simpliciales* sont données par $d_j = (\delta^j)^*$ et $s_j = (\sigma^j)^*$. La j^{e} face d_j supprime le j^{e} intervalle

$$\begin{aligned} d_j : \quad & Int_k \to Int_{k-1} \\ & (I_0 \leq \ldots \leq I_k) \to (I_0 \leq \ldots \leq \hat{i}_j \leq \ldots \leq I_k) \end{aligned}$$

et la j^{e} dégénérescence s_j double le j^{e} intervalle

$$\begin{aligned} s_j : \quad & Int_k \to Int_{k+1} \\ & (I_0 \leq \ldots \leq I_k) \to (I_0 \leq \ldots \leq I_j \leq I_j \leq \ldots \leq I_k). \end{aligned}$$

Proposition 3.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le complexe de Kan Int_k est contractile.*

Démonstration. On va prouver que Int_0 est contractile. La démarche s'adapte au cas général. Soit $\Delta^0 = [0]$ le 0-simplexe standard. On considère les applications définies sur les m-simplexes :

$$\begin{aligned} & \Delta^0 \xrightarrow{i} Int_0 & \qquad & Int_0 \xrightarrow{r} \Delta^0 \\ & [0, \ldots, 0] \mapsto (0,1)_{x \in |\Delta^m|_e} & & (a(x), b(x))_{x \in |\Delta^m|_e} \mapsto [0, \ldots, 0]. \end{aligned}$$

Il est clair que $r \circ i = \mathrm{id}_{\Delta^0}$. Inversement, montrons que $i \circ r$ est homotope à id_{Int_0}. On considère l'homotopie donnée par

$$\begin{aligned} H : \quad & \Delta^1 \times Int_0 \to Int_0 \\ & [0] \times (a,b) \mapsto (a,b) \\ & [1] \times (a,b) \mapsto (0,1) \\ & [0,1] \times (a(x), b(x))_{x \in |\Delta^1|_e} \mapsto (c(x), d(x))_{x \in |\Delta^1|_e}. \end{aligned}$$

C'est un morphisme d'ensembles simpliciaux, il suffit donc de le définir sur les simplexes non dégénérés (Déf A.9). De plus, les applications induites sur les niveaux commutent avec les applications faces et dégénérescences, c'est pourquoi on a

$$(c(1), d(1)) = d_0^{\Delta}\big(c(x), d(x)\big)_{x\in|\Delta^1|_e} = H\Big([1] \times d_0^{\Delta}\big(a(x), b(x)\big)_{x\in|\Delta^1|_e}\Big) = (0, 1)$$

et

$$(c(0), d(0)) = d_1^{\Delta}\big(c(x), d(x)\big)_{x\in|\Delta^1|_e} = H\Big([0] \times d_1^{\Delta}\big(a(x), b(x)\big)_{x\in|\Delta^1|_e}\Big) = (a(0), b(0)).$$

On peut prendre

$$\big(c(x), d(x)\big) = \big((1-x)a(0), x + (1-x)b(0)\big).$$

On a bien montré que Int_0 est contractile. La méthode s'adapte au cas général en considérant une famille de $k+1$ intervalles au lieu d'un seul intervalle. □

Proposition 3.2. *Soit l'application simpliciale*

$$i : Int_\bullet \simeq Int_\bullet \times_{Int_\bullet} Int_\bullet \to Int_\bullet \times^h_{Int_\bullet} Int_\bullet$$

donnée à chaque niveau par l'application canonique entre le produit fibré et le produit fibré homotopique. C'est un rétracte par déformation donc une équivalence faible homotopique.

Démonstration. On définit le rétracte r niveau par niveau. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} r : \quad & Int_k \times^h_{Int_k} Int_k \to Int_k \\ & (\underline{I}, \underline{J}, \gamma) \mapsto \underline{I}, \end{aligned}$$

où $\underline{I} = I_0 \leq \ldots \leq I_k$, $\underline{J} = J_0 \leq \ldots \leq J_k$ sont deux familles de $(k+1)$ intervalles et γ est un chemin entre eux. De plus, en composant avec les applications faces, on remarque que pour $0 \leq i \leq k$ on a $\gamma_i(0) = I_i$ et $\gamma_i(1) = J_i$.
Il est clair que $r \circ i = \mathrm{id}_{Int_k}$. En ce qui concerne la composée, on a

$$\begin{aligned} i \circ r : \quad & Int_k \times^h_{Int_k} Int_k \to Int_k \times^h_{Int_k} Int_k \\ & (\underline{I}, \underline{J}, \gamma) \mapsto (\underline{I}, \underline{I}, \gamma_{cst}). \end{aligned}$$

Une homotopie entre $i \circ r$ et l'identité est donnée par l'application :

$$\begin{aligned} H : \quad & \Delta^1 \times Int_k \times^h_{Int_k} Int_k \to Int_k \times^h_{Int_k} Int_k \\ & [0] \times (\underline{I}, \underline{J}, \gamma) \mapsto (\underline{I}, \underline{I}, \gamma_{cst}) \\ & [1] \times (\underline{I}, \underline{J}, \gamma) \mapsto (\underline{I}, \underline{J}, \gamma) \\ & [0,1] \times (\underline{I}(x), \underline{J}(x), \gamma(x))_{x\in|\Delta^1|_e} \mapsto (\underline{I}(x), (1-x)\underline{I}(x) + x\underline{J}(x), \lambda(x))_{x\in|\Delta^1|_e}, \end{aligned}$$

avec $\lambda(x) = (1-x)\gamma_{cst}(x) + x\gamma(x)$ et $\gamma_{cst}(x)$ le chemin constant ayant pour origine et but $\underline{I}(x)$. □

Proposition 3.3. *$Int_\bullet$ est un espace de Segal complet.*

Démonstration. On a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le complexe de Kan Int_k est contractile. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a une équivalence faible homotopique

$$Int_k \to Int_1 \times^h_{Int_0} \ldots \times^h_{Int_0} Int_1.$$

De plus, $Int_\bullet$ est complet car on dispose d'une équivalence faible entre Int_0 et Int_1. □

Montrons à présent comment étendre nos définitions pour obtenir un espace de Segal complet à n-feuillets.

Définition 3.1. On définit un espace simplicial à n-feuillets en posant

$$Int^n_{\bullet,\ldots,\bullet} = (Int_\bullet)^{\times n}.$$

Un élément de $Int^n_{k_1,\ldots,k_n}$ sera noté

$$\overline{\underline{I}} = (\overline{\underline{a}}, \overline{\underline{b}}) = (I^i_0 \leq \ldots \leq I^i_{k_i})_{1\leq i\leq n}.$$

Proposition 3.4. *$Int^n_{\bullet,\ldots,\bullet}$ est un espace de Segal complet à n-feuillets.*

Démonstration. Il y a trois points à considérer (Déf 2.14). La condition de Segal et la complétude sont vérifiées car elles le sont pour $Int_\bullet$. Il faut montrer que l'espace est essentiellement constant, c'est à dire qu'il existe une équivalence homotopique faible d'espaces simpliciaux à n-feuillets entre $Int^n_{\bullet,\ldots,\bullet}$ et un foncteur constant. Ceci est dû au fait que Int_k est contractile pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

L'application définie ci-dessous sera utilisée par la suite.

Définition 3.2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit l'application B par

$$\begin{aligned} B :\ & Int_k \to Int_0 \\ & \underline{I}(x) = (I_0(x) \leq \ldots \leq I_k(x))_{x\in|\Delta^m|_e} \mapsto B(\underline{I}(x)) = B(\underline{a}(x), \underline{b}(x)) =]a_0(x), b_k(x)[_{x\in|\Delta^m|_e}. \end{aligned}$$

Étant donnée une famille de k intervalles ordonnés, ceci revient à garder uniquement l'intervalle ouvert formé des points extrémaux (a_0, b_k).
Cette application s'étend naturellement à l'espace simplicial à n-feuillets $Int^n_{\bullet,\ldots,\bullet}$.
Soient $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, l'application $B : Int^n_{k_1,\ldots,k_n} \to Int_0^{\times n}$ envoie un m-simplexe

$$\overline{\underline{I}}^m = (I^i_0(x) \leq \ldots \leq I^i_{k_i}(x))_{x\in|\Delta^m|_e,\ 1\leq i\leq n}$$

sur la plus petite "boîte" contenant tous les intervalles

$$B(\overline{\underline{I}}^m) = B(\overline{\underline{a}}^m, \overline{\underline{b}}^m) =]a^1_0(x), b^1_{k_1}(x)[\times \ldots \times]a^n_0(x), b^n_{k_n}(x)[_{x\in|\Delta^m|_e}.$$

On peut identifier le m-simplexe $B(\overline{\underline{I}}^m)$ avec $\cup_{x\in|\Delta^m|_e} B(\overline{\underline{I}}(x)) \times \{x\} \subset \mathbb{R}^n \times |\Delta^m|_e$.

3.2 La catégorie des bordismes $Bord_n$

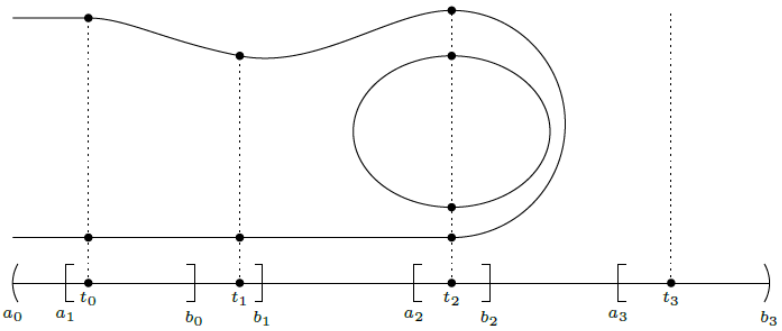
On va définir l'espace simplicial à n-feuillets, $(PBord_n^V)_{\bullet,\dots,\bullet}$ présenté en début de partie. Commençons par préciser les 0-simplexes de $(PBord_n^V)_{k_1,\dots,k_n}$ que nous noterons $(\mathbb{P}Bord_n^V)_{k_1,\dots,k_n}$.

Définition 3.3. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $r \in \mathbb{N}$, qu'on identifie avec $\mathbb{R}^r$. Pour tout n-uplet, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, on définit $(\mathbb{P}Bord_n^V)_{k_1,\dots,k_n}$ comme la collection de paires $(M, \underline{\overline{I}} = (I_0^i, \leq \dots \leq I_{k_i}^i)_{1\leq i\leq n})$ vérifiant les conditions suivantes.

1. $\forall 1 \leq i \leq n,\ (I_0^i, \leq \dots \leq I_{k_i}^i) \in Int_{k_i}$.
2. M est une sous-variété de dimension n fermée de $V \times B(\underline{\overline{I}})$ et la composée
$$\pi : M \hookrightarrow V \times B(\underline{\overline{I}}) \twoheadrightarrow B(\underline{\overline{I}})$$
est une application propre.
3. Soit $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, on pose
$$p_S : M \xrightarrow{\pi} B(\underline{\overline{I}}) \xrightarrow{\pi_S} \mathbb{R}^S$$
où $\pi_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^S$ est la projection sur les coordonnées indexées par S. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq j_i \leq k_i$ et à tout point $x \in p_{\{i\}}^{-1}(I_{j_i}^i)$, l'application $p_{\{i,\dots,n\}}$ est une submersion.

Remarque 3.1. Un élément de $(\mathbb{P}Bord_n^V)_{k_1,\dots,k_n}$ s'interprète comme une collection de $k_1 \cdots k_n$ n-bordismes (avec k_i n-bordismes sur la i^{e} direction) que l'on peut composer afin d'obtenir M. Ceci est dû à la condition (3) de la définition.

- Pour tout $1 \leq i \leq n$ et à tout point $x \in p_{\{i\}}^{-1}(I_j^i)$, l'application $p_{\{i\}}$ est une submersion. Ainsi, tout $t_j^i \in I_j^i$ étant une valeur régulière de $p_{\{i\}}$, $p_{\{i\}}^{-1}(t_j^i)$ est une $(n-1)$-variété. La variété M s'obtient sur l'axe de temps i par recollement des n-bordismes entre les $(n-1)$-variétés $\{p_{\{i\}}^{-1}(t_j^i)\}_{0\leq j\leq k_i}$.
  On peut montrer que des choix différents de "coupures" $\{t_j^i\}_{0\leq j\leq k_i}$ donnent des familles difféomorphes de k_i n-bordismes (Corollaire 5.5 de [CS19]).
- Pout tout $t_j^{n-1} \in I_j^{n-1}$ et $t_l^n \in I_l^n$, on a l'inclusion suivante
$$p_{\{n-1,n\}}^{-1}((t_j^{n-1}, t_l^n)) \subset p_{\{n-1\}}^{-1}(I_j^{n-1}).$$
  A tout point $x \in p_{\{n-1\}}^{-1}(I_j^{n-1})$, l'application $p_{n-1,n}$ est une submersion. Ainsi $p_{\{n-1,n\}}^{-1}((t_j^{n-1}, t_l^n))$ est une $(n-2)$ variété.
- Plus généralement, pour tout $(t_{j_k}^k, \dots, t_{j_n}^n) \in I_{j_k}^k \times \dots \times I_{j_n}^n$, l'image réciproque $p_{k,\dots,n}^{-1}((t_{j_k}^k, \dots, t_{j_n}^n))$ est une $(k-1)$-variété.



Exemple 3.1. Voici un exemple d'élément de $(\mathbb{P}Bord_1^{\mathbb{R}})_3$

De façon analogue on définit les m-simplexe de $(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n}$.

Définition 3.4. Soit $m \in \mathbb{N}$. Un m-simplexe de $(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n}$ est une collection de paires $(M, \underline{\overline{I}}^m = (I_0^i(x), \leq \ldots \leq I_{k_i}^i(x))_{1\leq i\leq n;\ x\in|\Delta^m|_e})$ vérifiant les conditions suivantes.

1. $\underline{\overline{I}}^m = (I_0^i(x) \leq \ldots \leq I_{k_i}^i(x))_{1\leq i\leq n;\ x\in|\Delta^m|_e}$ est un m-simplexe de $Int_{k_1,\ldots,k_n}$.
2. M est une sous-variété de dimension $n+m$ fermée de $V \times B(\underline{\overline{I}}^m) \subset V \times \mathbb{R}^n \times |\Delta^m|_e$ telle que
   - la composée
   $$\pi : M \hookrightarrow V \times B(\underline{\overline{I}}^m) \twoheadrightarrow B(\underline{\overline{I}}^m)$$
   est une application propre,
   - sa composée avec la projection sur $|\Delta^m|_e$ est une submersion $M \to |\Delta^m|_e$ qui est triviale en dehors de $|\Delta^m|$.
3. Soit $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, on pose
   $$p_S : M \xrightarrow{\pi} B(\underline{\overline{I}}^m) \subset \mathbb{R}^n \times |\Delta^m|_e \xrightarrow{\pi_S} \mathbb{R}^S \times |\Delta^m|_e.$$
   Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq j_i \leq k_i$ et à tout point $x \in p_{\{i\}}^{-1}(\cup_{x\in|\Delta^m|_e} I_{j_i}^i(x) \times \{x\})$, l'application $p_{\{i,\ldots,n\}}$ est une submersion.

On note M_x, l'image réciproque de $x \in |\Delta^m|_e$ par $M \to |\Delta^m|_e$. Ceci définit un élément de $(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n}$:

$$(M_x) = (M_x \subset V \times B(\underline{\overline{I}}(x)), \underline{\overline{I}}(x)).$$

La composition de l'inclusion avec la projection sera notée $\pi_x : M_x \to B(\underline{\overline{I}}(x))$.

On va utiliser les structures simpliciale et spatiale de $Int^n_{\bullet,\ldots,\bullet}$ pour expliciter celles de $(PBord_n^V)_{\bullet,\ldots,\bullet}$.

Définition 3.5. Soit $f : [m] \to [l]$ un morphisme de la catégorie simpliciale $\mathbf{\Delta}$. Il induit une application entre les simplexes standards étendus $|f| : |\Delta^m|_e \to |\Delta^l|_e$. Soit $(M, \underline{\overline{I}} = (I_0^i(x), \leq \ldots \leq I_{k_i}^i(x))_{1\leq i\leq n;\ x\in|\Delta^l|_e})$ un l-simplexe de $(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n}$. Son image par l'application f^Δ est un m-simplexe obtenu de la façon suivante.

- Pour $1 \leq i \leq n$, le m-simplexe dans Int_{k_i} s'obtient en appliquant f^Δ (Notation 3.1) :

$$f^\Delta : (I_0(x) \leq \ldots \leq I_k(x))_{x\in|\Delta^l|_e} \to \Big(I_0\big(|f|(x)\big) \leq \ldots \leq I_k\big(|f|(x)\big)\Big)_{x\in|\Delta^m|_e}.$$

- La variété $f^\Delta M \subset V \times B(\underline{\overline{I}}(x))_{x\in|\Delta^m|_e}$ est le pullback du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} f^\Delta M & \longrightarrow & |\Delta^m|_e \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle |f|} \\ M & \longrightarrow & |\Delta^l|_e. \end{array}$$

  L'image réciproque de $x \in |\Delta^m|_e$ par $f^\Delta M \to |\Delta^m|_e$ est $(f^\Delta M)_x = M_{|f|(x)}$. On a

$$f^\Delta M = \bigcup_{x\in|\Delta^m|_e} M_{|f|(x)} \times \{x\}.$$

Les applications faces et dégénérescences *spatiales*, notées d_j^Δ, s_j^Δ, sont celles induites par les cofaces δ^j et les codégénérescences σ^j (Notation A.1).

On présente une manière de définir un chemin.

Exemple 3.2. Soit $(M) = (M, \underline{\overline{I}} = (I_0^i \leq \ldots \leq I_{k_i}^i)_{1\leq i\leq n})$ un 0-simplexe de $(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n}$. Soit $1 \leq i \leq n$, on va découper un morceau à l'extrémité de (M) le long de la i^{e} direction, ceci donnera un nouvel élément qui sera relié à (M) par un chemin. De façon équivalente (Déf A.14), cela revient à exhiber un 1-simplexe dont l'origine sera (M) et le but sera ce nouvel élément.
Soit $0 < \epsilon < b_0^i - a_0^i$. On se donne une fonction croissante, lisse, bijective $\varepsilon : [0,1] \to [0,\epsilon]$ avec des dérivées nulles aux extrémités.
Pour $0 \leq j \leq k_i$ et $x \in [0,1] \subset |\Delta^1|_e$, on pose

$$I_j^i(x) =]a_0^i + \varepsilon(x), b_{k_i}^i[\cap I_j^i, \text{ alors } B(\underline{\overline{I}}(x)) =]a_0^i + \varepsilon(x), b_{k_i}^i[\subset B(\underline{\overline{I}}).$$

Les intervalles sont constants en dehors de $x \in [0,1]$. On note $M(\varepsilon)$ l'image réciproque de $\cup_{x\in|\Delta^1|_e} B(\underline{\overline{I}}(x)) \times \{x\}$ par $M \times |\Delta^1|_e \to B(\underline{\overline{I}}) \times |\Delta^1|_e$.
Ainsi $(M(\varepsilon), \underline{\overline{I}}(x))$ est un 1-simplexe de $(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n}$ et pour $x \in_{|\Delta^1|_e}$, on a $M(\varepsilon)_x = p_{\{i\}}^{-1}((a_0^i + \varepsilon(x), b_{k_i}^i))$. On récupère l'origine du 1-simplexe

$$\delta_1^\Delta M(\varepsilon) = \bigcup_{x\in|\Delta^0|_e} M(\varepsilon)_{|\delta^1|(x)} \times \{x\} = M(\varepsilon)_0 = p_{\{i\}}^{-1}((a_0^i, b_{k_i}^i)) = M$$

et son but

$$\delta_0^{\Delta} M(\varepsilon) = \bigcup_{x \in |\Delta^0|_e} M(\varepsilon)_{|\delta^0|(x)} \times \{x\} = M(\varepsilon)_1 = p_{\{i\}}^{-1}((a_0^i + \epsilon, b_{k_i}^i)).$$

De façon analogue, on peut effectuer une coupure de l'autre côté et considérer l'image réciproque $p_{\{i\}}^{-1}((a_0^i, b_{k_i}^i - \delta))$ pour δ suffisamment petit.

Nous allons expliciter la structure simpliciale de $(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n}$.

Définition 3.6. Pour $1 \leq i \leq n$, on considère une famille de morphismes $g_i : [m_i] \to [k_i]$ dans $\mathbf{\Delta}$. On note $g = (g_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'application produit sur $\mathbf{\Delta}^n$. L'application

$$g^* : (PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n} \to (PBord_n^V)_{m_1,\ldots,m_n}$$

envoie un m-simplexe

$$(M \subset V \times B(\underline{\overline{I}}^m), \underline{\overline{I}}^m = (I_0^i(x), \leq \ldots \leq I_{k_i}^i(x))_{1 \leq i \leq n;\ x \in |\Delta^m|_e})$$

sur

$$(g^* M = \pi^{-1}(B(g^* \underline{\overline{I}}^m)) \subset V \times B(\underline{\overline{I}}^m), g^* \underline{\overline{I}}^m = (I_{g_i(0)}^i(x), \leq \ldots \leq I_{g_i(m_i)}^i(x))_{1 \leq i \leq n;\ x \in |\Delta^m|_e}),$$

où $\pi : M \hookrightarrow V \times B(\underline{\overline{I}}^m) \twoheadrightarrow B(\underline{\overline{I}}^m)$. Autrement dit, la variété $g^* M$ est l'image réciproque de la nouvelle "boîte". De plus, on a $(g^* M)_x = g^* M_x$.

Les faces simpliciales sont notées

$$d_j^i : (PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n} \to (PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_i-1,\ldots,k_n}.$$

Les dégénérescences simpliciales sont notées

$$s_j^i : (PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_n} \to (PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_i+1,\ldots,k_n}.$$

Regardons à présent comment définir une (∞, n)-catégorie de bordismes à partir de $PBord_n^V$.

Proposition 3.5. $(PBord_n^V)_{\bullet,\ldots,\bullet}$ *est un espace de Segal à n-feuillets.*

Démonstration. Il y a deux conditions à vérifier.

Partie 1. Tout d'abord, montrons que pour tout $1 \leq i \leq n$ et toute famille $k_1, \ldots, , k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$,

$$(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_{i-1},\bullet,k_{i+1},\ldots,k_n}$$

est un espace de Segal.
Soient $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ et $k_i = m + l$, il faut prouver que l'application

$$h_{m,l} : (PBord_n^V)_{k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_n} \to (PBord_n^V)_{k_1,\ldots,m,\ldots,k_n} \times^h_{(PBord_n^V)_{k_1,\ldots,0,\ldots,k_n}} (PBord_n^V)_{k_1,\ldots,l,\ldots,k_n}$$

est une équivalence faible homotopique.
Dorénavant, on notera uniquement le i^{e} indice pour plus de lisibilité. On écrira donc :

$$h_{m,l} : (PBord_n^V)_{k_i} \to (PBord_n^V)_m \times^h_{(PBord_n^V)_0} (PBord_n^V)_l.$$

De manière équivalente, on souhaite montrer que le diagramme suivant est un carré cartésien homotopique :

$$\begin{tikzcd}
(PBord_n^V)_{k_i} \arrow[r, "p^*_{0,\ldots,m}"] \arrow[d, "p^*_{m,\ldots,m+l}"'] & (PBord_n^V)_m \arrow[d, "p^*_m"] \\
(PBord_n^V)_l \arrow[r, "p^*_0"] & (PBord_n^V)_0.
\end{tikzcd}$$

Rappelons (Notation 2.1) que pour toute famille $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \ldots \leq i'_n \leq n$ et pour tout ensemble simplicial $X_\bullet$, on note $p^*_{i_0,i_1,\ldots,i'_n} : X_n \to X'_n$ l'application associée à

$$\begin{aligned} p_{i_0,i_1,\ldots,i'_n} : \quad & [n'] \to [n] \\ & j \mapsto i_j. \end{aligned}$$

Un élément du produit fibré homotopique $(PBord_n^V)_m \times^h_{(PBord_n^V)_0} (PBord_n^V)_l$ est la donnée d'une paire

$$\begin{aligned} (M, \underline{I}) &= (M \subset V \times B(\underline{I}), \underline{I} = (I_0^i \leq \ldots \leq I_m^i, I_0^j \leq \ldots \leq I_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}, \\ (N, \underline{J}) &= (N \subset V \times B(\underline{J}), \underline{J} = (J_0^i \leq \ldots \leq J_l^i, J_0^j \leq \ldots \leq J_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \end{aligned}$$

et d'un chemin γ entre le but $p_m^*(M, \underline{I}) = (p_m^*(M), I_m^i, (I_0^j \leq \ldots \leq I_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i})$ de $(M, \underline{I})$ et la source $p_0^*(N, \underline{J}) = (p_0^*(N), J_0^i, (J_0^j \leq \ldots \leq J_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i})$ de $(N, \underline{J})$ dans la i^{e} direction.

Étape 1.1 (Présentation de la méthode)**.** On va décomposer $h_{m,l}$ en trois morphismes et nous verrons que chacun d'entre eux est une équivalence faible homotopique :

$$\begin{tikzcd}
(PBord_n^V)_{k_i} \arrow[r, "h_{m,l}"] \arrow[d, "h_1"] & (PBord_n^V)_m \times^h_{(PBord_n^V)_0} (PBord_n^V)_l \\
(PBord_n^V)^{m,l}_{k_i} \arrow[r, hook, "h_2"] & P^{m,l}_{k_i}. \arrow[u, hook, "h_3"]
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Définissons les ensembles apparaissant dans ce diagramme. On commence par l'espace simplicial à n-feuillets, $P^{m,l}_{\bullet,\dots,\bullet}$. Pour chaque $1 \leq j \leq n$ avec $j \neq i$, on définit une application

$$\begin{array}{c} PBord^V_n \to Int \\ (M, \underline{\overline{I}}) \to \underline{I}^j \end{array}$$

qui induit la flèche du bas dans le diagramme cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} P^{m,l}_{\bullet,\dots,k_i,\dots,\bullet} & \longrightarrow & Int^{n-1}_{\bullet,\dots,\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ (PBord^V_n)_{\bullet,\dots,m,\dots,\bullet} \times^h_{(PBord^V_n)_{\bullet,\dots,0,\dots,\bullet}} (PBord^V_n)_{\bullet,\dots,l,\dots,\bullet} & \longrightarrow & Int^{n-1}_{\bullet,\dots,\bullet} \times^h_{Int^{n-1}_{\bullet,\dots,\bullet}} Int^{n-1}_{\bullet,\dots,\bullet} \end{array}$$

La flèche de droite est induite par l'équivalence faible homotopique (Prop 3.2)

$$Int_\bullet \simeq Int_\bullet \times_{Int_\bullet} Int_\bullet \to Int_\bullet \times^h_{Int_\bullet} Int_\bullet.$$

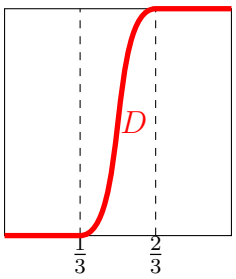
L'espace $P^{m,l}_{\bullet,\dots,\bullet}$ correspond aux paires $(M, \underline{\overline{I}}), (N, \underline{\overline{J}})$ pour lesquelles la j^{e} famille d'intervalles coïncide (pour $j \neq i$) et à un chemin γ constant le long de ces intervalles.
Définissons à présent l'ensemble situé en bas à gauche de (3). On dispose de l'application canonique $Int_m \times_{Int_0} Int_l \to Int_m \times^h_{Int_0} Int_l$ (on ne garde que le i^{e} indice), c'est une équivalence faible homotopique car les espaces sont contractiles (Prop3.3). On définit $(PBord^V_n)^{m,l}_{\bullet,\dots,\bullet}$ comme pullback du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (PBord^V_n)^{m,l}_{\bullet,\dots,k_i,\dots,\bullet} & \longrightarrow & Int_m \times_{Int_0} Int_l \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ P^{m,l}_{\bullet,\dots,k_i,\dots,\bullet} & \longrightarrow & Int_m \times^h_{Int_0} Int_l. \end{array}$$

Il s'agit de nouveau des paires $(M, \underline{\overline{I}}), (N, \underline{\overline{I}})$ pour lesquelles la j^{e} famille d'intervalles coïncide (pour $j \neq i$) et à un chemin γ constant le long de ces intervalles, mais, de plus, le long de la i^{e} direction le dernier intervalle de $(M, \underline{\overline{I}})$ correspond au premier intervalle de $(N, \underline{\overline{J}})$: $I^i_m = J^i_0$.

Étape 1.2. Montrons que l'application h_1 est une équivalence faible. Pour cela, on exhibe un rétracte par déformation. On se donne une diagonale lissée $D \subset [0,1]^2$, elle s'obtient comme graphe d'une fonction $\epsilon : [0,1] \to [0,1]$ dont la dérivée est nulle sur $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On suppose de plus qu'elle est bijective sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ avec une

fonction inverse lisse.



Rappelons qu'un élément (0-simplexe) de $(PBord_n^V)_{k_i}^{m,l}$ est donné par une paire $(M, \underline{I}), (N, \underline{J})$ et un chemin γ entre $p_m^*(M, \underline{I})$ et $p_0^*(N, \underline{J})$, constant le long des intervalles. On va utiliser γ pour recoller les variétés M et N.
Soient $]a, b[= B(\underline{I}^i) = B(I_0^i \leq \ldots \leq I_m^i)$ et $]c, d[= B(\underline{J}^i) = B(J_0^i \leq \ldots \leq J_l^i)$ alors $I_m^i = J_0^i =]c; b[$.
Le chemin γ étant un 1-simplexe, c'est une sous-variété

$$P \subset V \times]c, b[\times B((I_0^j \leq \ldots \leq I_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}) \times |\Delta^1|_e$$

telle que la composée $p_{\{i\}} = \pi_{\{i\}} \circ \pi : P \to]c, b[\times |\Delta^1|_e$ soit une submersion. Plus précisément, par définition (Définition 3.4), π est une submersion propre et $\pi_{\{i\}}$ est un fibré trivial. En appliquant le théorème de fibration d'Ehresmann (Théorème C.2), on montre que π est un fibré. Il est même trivial par le corollaire C.1.
On récupère l'origine du 1-simplexe

$$p_m^*(M) = \delta_1^\Delta P = P_0 = p_{\{i\}}^{-1}(]c, b[\times \{0\})$$

et son but

$$p_0^*(N) = \delta_0^\Delta M(\varepsilon) = P_1 = p_{\{i\}}^{-1}(]c, b[\times \{1\}).$$

On obtient la diagonale lissée $D^{c,b} \subset]c, b[\times |\Delta^1|_e$ comme graphe de la composée

$$\begin{array}{rccccc} \epsilon_{c,b} : &]c, b[& \to & [0, 1] & \to & [0, 1] \subset |\Delta^1|_e \\ & t & \mapsto & s = \frac{t-c}{d-c} & \mapsto & \epsilon(s) \end{array}$$

Soit $P_{diag} := p_{\{i\}}^{-1}(D^{c,b})$. comme $p_{\{i\}}$ est un fibré trivial, la propriété C.6 montre que P_{diag} est difféomorphe à $p_m^*(M)$ et $p_0^*(N)$. Ainsi, on peut recoller les variétés M et N le long de P_{diag} et obtenir $M \amalg_{P_{diag}} N$. On l'interprète comme sous-variété de $V \times \mathbb{R} \times]a, d[$ grâce aux inclusions suivantes :

- $M \simeq M \times \{0\} \subset V \times \{0\} \times]a, b[\subset V \times \mathbb{R} \times]a, d[$,
- $N \simeq N \times \{1\} \subset V \times \{1\} \times]c, d[\subset V \times \mathbb{R} \times]a, d[$,
- $P_{diag} \subset V \times |\Delta^1|_e \times]c, b[\simeq V \times \mathbb{R} \times]c, b[\subset V \times \mathbb{R} \times]a, d[$.

On procède de façon analogue pour les k-simplexes, $k \in \mathbb{N}$. Le chemin γ est alors un $(k+1)$-simplexe, il faut donc remplacer $|\Delta^1|_e$ par $|\Delta^k|_e$. On définit ainsi une application

$$h_1' : (PBord_n^V)^{m,l}_{\bullet,\ldots,k_i,\ldots,\bullet} \to (PBord_n^V)_{\bullet,\ldots,k_i,\ldots,\bullet}.$$

Montrons à présent qu'il s'agit bien d'un rétracte par déformation de h_1.
Commençons par voir que $h_1' \circ h_1$ est l'identité. Pour cela, il suffit d'expliciter la définition de h_1. On se donne un élément de $(PBord_n^V)_{k_i}$:

$$(L, \underline{\overline{K}}) = (L \subset V \times B(\underline{\overline{K}}), \underline{\overline{K}} = (K_0^j \leq \ldots \leq K_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n}).$$

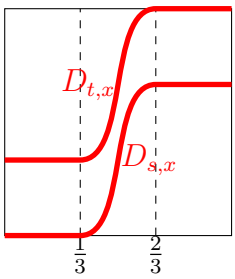
Son image par h_1 est la paire

$$(M, \underline{\overline{K'}}) := (p^*_{0,\ldots,m}(L), \underline{\overline{K'}} = (K_0^i \leq \ldots \leq K_m^i, K_0^j \leq \ldots \leq K_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}),$$
$$(N, \underline{\overline{K"}}) := (p^*_{m,\ldots,m+l}(L), \underline{\overline{K"}} = (K_m^i \leq \ldots \leq K_{m+l}^i, K_0^j \leq \ldots \leq K_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i})$$

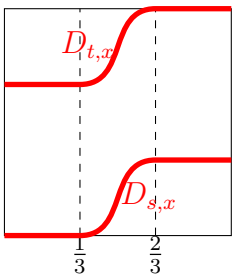
et le chemin γ entre le but $p_m^*(M, \underline{\overline{K'}}) = (p_m^*(M), K_m^i, (K_0^j \leq \ldots \leq K_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i})$ de $(M, \underline{\overline{K'}})$ et la source $p_0^*(N, \underline{\overline{K"}}) = (p_0^*(N), K_m^i, (K_0^j \leq \ldots \leq K_{k_j}^j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i})$ de $(N, \underline{\overline{K"}})$ est constant sur les intervalles. Il s'agit bien d'un élément de $(PBord_n^V)^{m,l}_{k_i}$.
Composer avec h_1' revient à recoller les variétés M et N le long d'une variété difféomorphe à $p_m^*(M)$ et à $p_0^*(N)$. Il est donc clair que $h_1' \circ h_1$ est l'identité.
Regardons de plus près la composée $h_1 \circ h_1'$. Elle envoie une paire de l-simplexes $(M, \underline{\overline{I}}), (N, \underline{\overline{J}})$ et un chemin γ entre le but et la source, vers une paire $(M', \underline{\overline{I}}), (N', \underline{\overline{J}})$ et un chemin constant. Il ne s'agit donc pas de l'identité, mais on peut définir une homotopie. Nous aurons pour cela besoin des fonctions suivantes, obtenues en modifiant ϵ. Soit $x \in [0,1]$, on pose

$$\epsilon_x^s = x\epsilon \text{ et } \epsilon_x^t = 1 + x(\epsilon - 1).$$

Pour $x = 1$, on a $\epsilon = \epsilon_1^t = \epsilon_1^s$ et pour $x = 0$, on obtient $\epsilon_0^s = 0$ et $\epsilon_0^t = 1$. On note respectivement $D_{s,x}$ et $D_{t,x}$ leurs graphes sur $[0,1]$.



$x = \frac{2}{3}$



$x = \frac{1}{3}$

Soit $x \in [0,1]$, en appliquant la démarche précédente à $D_{s,x}$ et $D_{t,x}$, on définit des sous-variétés $P_{diag}^{s,x}$ et $P_{diag}^{t,x}$. On se donne un triplet $(M, \underline{\overline{I}}), (N, \underline{\overline{J}}), \gamma$. En recollant

M avec $P^{s,x}_{diag}$ et N avec $P^{t,x}_{diag}$, on obtient $(M_x, \overline{\underline{I}})$ et $(N_x, \overline{\underline{J}})$. Remarquons que $M_0 = M,\ N_0 = N$ et $M_1 = M',\ N_1 = N'$. Le chemin γ_x entre le but de $(M_x, \overline{\underline{I}})$ et la source de $(N_x, \overline{\underline{J}})$ s'obtient à partir de l'image réciproque par $\pi_{\{i\}}$ de la partie comprise entre $D_{s,x}$ et $D_{t,x}$ (c'est une sous-variété de P).
L'homotopie recherchée est donnée par

$$\begin{aligned} H :\ & [0,1] \times (PBord^V_n)^{m,l} \to (PBord^V_n)^{m,l} \\ & [1] \times ((M, \overline{\underline{I}}), (N, \overline{\underline{J}}), \gamma) \mapsto ((M', \overline{\underline{I}}), (N', \overline{\underline{J}}), \gamma_{cst}) \\ & [0] \times ((M, \overline{\underline{I}}), (N, \overline{\underline{J}}), \gamma) \mapsto ((M, \overline{\underline{I}}), (N, \overline{\underline{J}}), \gamma) \\ & [0,1] \times ((M, \overline{\underline{I}}(x)), (N, \overline{\underline{J}}(x)), \gamma(x))_{x \in |\Delta^1|_e} \mapsto ((M_x, \overline{\underline{I}}(x)), (N_x, \overline{\underline{J}}(x)), \gamma_x(x))_{x \in |\Delta^1|_e} \end{aligned}$$

Étape 1.3. Il faut montrer que h_2 et h_3 sont des équivalences faibles homotopique. On trouvera les détails dans [CS19]. L'application $h_{m,l}$ est bien une équivalence faible homotopique.

Partie 2. Il reste à voir que pour tout $1 \leq i \leq n$ et $k_1, \ldots, k_{i-1} \in \mathbb{N}$ l'espace de Segal à $(n-i)$-feuillets $(PBord^V_n)_{k_1,\ldots,k_{i-1},0,\bullet,\ldots,\bullet}$ est essentiellement constant.
Soit $k_{i+1}, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, nous allons montrer que l'application (induite par les dégénérescences)

$$(PBord^V_n)_{k_1,\ldots,k_{i-1},0,0,\ldots,0} \hookrightarrow (PBord^V_n)_{k_1,\ldots,k_{i-1},0,k_{i+1},\ldots,k_n}$$

possède un rétracte par déformation (pour $j > i$, $\underline{I}^j$, la j^{e} famille d'intervalles est envoyée sur $B(\underline{I}^j) =]a^j_0, b^j_{k_j}[)$ et que c'est donc une équivalence faible homotopique.
On va définir une homotopie

$$H : \Delta^1 \times (PBord^V_n)_{k_1,\ldots,k_{i-1},0,k_{i+1},\ldots,k_n} \to (PBord^V_n)_{k_1,\ldots,k_{i-1},0,k_{i+1},\ldots,k_n}.$$

Soit un 1-simplexe de $(PBord^V_n)_{k_1,\ldots,k_{i-1},0,k_{i+1},\ldots,k_n}$

$$(M) = (M \subset V \times B(\overline{\underline{I}}(x)), ((\underline{I}^\beta(x))_{1 \leq \beta < i}, (a^i_0(x), b^i_0(x)), (\underline{I}^\alpha(x))_{i < \alpha \leq n})_{x \in |\Delta^1|_e}).$$

L'image de $[0,1] \times (M)$ par H est le 1-simplexe

$$(M \subset V \times B(\overline{\underline{I}}(x)), ((\underline{I}^\beta(x))_{1 \leq \beta < i}, (a^i_0(x), b^i_0(x)), (\tilde{\underline{I}}^\alpha(x))_{i < \alpha \leq n})_{x \in |\Delta^1|_e})$$

où pour tout $\alpha > i$ et $0 \leq j \leq k_\alpha$, on pose

$$\begin{aligned} \tilde{a}^\alpha_j(x) &= (1-x)a^\alpha_j(x) + x a^\alpha_0(x), \\ \tilde{b}^\alpha_j(x) &= (1-x)b^\alpha_j(x) + x b^\alpha_{k_\alpha}(x). \end{aligned}$$

□

Définition 3.7. L'espace de Segal à n-feuillets $PBord_n$ s'obtient comme limite

$$PBord_n = \varinjlim_{V \subset \mathbb{R}^\infty} PBord^V_n.$$

Définition 3.8. L'(∞, n)-catégorie des bordismes $Bord_n$ s'obtient comme le complété de $PBord_n$.

3.3 Structures sur les bordismes

Dans cette sous-partie, nous allons voir comment munir les variétés de structures supplémentaires (orientation, repère, ...).

Définition 3.9. Soit X un espace topologique et $E \to X$ un fibré vectoriel réel de rang n. On peut lui associer un fibré $GL_n\mathbb{R}$-principal, ce qui induit une (classe d'homotopie) application $e : X \to BGL_n\mathbb{R}$. Une (X, E)**-structure** (ou (X, e)**-structure**) sur une n-variété M est la donnée de :

- une application $f : M \to X$,
- un isomorphisme de fibré vectoriel : $triv : TM \simeq f^*E$, où f^*E est limite du diagramme

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ M \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

On note $Var_n^{(X,E)}$ l'ensemble des n-variétés munies d'une (X, E)-structure.

Remarque 3.2. En fait, on dispose du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} TM \simeq f^*E \arrow[rr] \arrow[dd] & & E \arrow[d] \\ & & X \arrow[d, "e"] \\ M \arrow[r] & X \arrow[r, "e"'] & BGL_n\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

La composée $M \to X \to BGL_n\mathbb{R}$ classifie le fibré tangent TM.

Définition 3.10. Soient G un groupe topologique et $e : G \to O(n)$ un morphisme continu qui induit $e : BG \to BGL_n\mathbb{R}$. On considère le fibré vectoriel $E := (\mathbb{R}^n \times EG)/G$ sur BG. Une G**-structure** sur une n-variété M est une (BG, E)**-structure** (ou (BG, e)**-structure**) sur M.
On note Var_n^G l'ensemble des n-variétés munies d'une G-structure.
On note $Bord_n^G$ l'(∞, n)-catégorie extraite de $Bord_n$ en ne gardant que les variétés munies d'une G-structure.

Exemple 3.3. Si $G = \{1\}$ est le groupe trivial, alors $BG = *$ et E est le fibré vectoriel trivial de rang n. Ainsi le fibré tangent TM est trivial, on dit que M est **parallélisable**. Rappelons qu'un fibré vectoriel (E, p, B) de rang n est trivial s'il existe n sections $(s_1, \ldots, s_n)$ telles que pour tout $b \in B$, les vecteurs $(s_1(b), \ldots, s_n(b))$ soient libres [MS75]. Pour l'espace tangent TM d'une variété M ceci revient à considérer n champs de vecteurs. On pose $Bord_n^{fr} = Bord_n^{\{1\}}$.

Exemple 3.4. Si $G = O(n)$ le groupe orthogonal alors une variété avec une G-structure est une variété munie d'une structure riemannienne.

Exemple 3.5. Si $G = SO(n)$ le groupe spécial orthogonal alors une variété avec une G-structure est une variété orientée.

4 L'hypothèse du cobordisme

4.1 Éléments dualisables

Lors de notre étude des TCQT en dimension 1 et 2, nous avons vu qu'elles vérifient une condition de finitude. Par exemple (partie 1.4), une 1-TQFT F : $\mathbf{Cob}(1) \to \mathbf{Vect}(k)$ est caractérisée par la valeur $F(pt_+)$. Les objets de $\mathbf{Vect}(k)$ ainsi obtenus sont les espaces vectoriels de dimension finie, ce sont les éléments dualisables de la catégorie.

Définition 4.1. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale symétrique. Un objet x de $\mathcal{C}$ est **dualisable** s'il existe un triplet $(\overline{x}, e, c)$, formé d'un objet $\overline{x}$ de $\mathcal{C}$, d'une **évaluation** $e : x \otimes \overline{x} \to \mathbf{1}$, d'une **coévaluation** $c : \mathbf{1} \to \overline{x} \otimes x$, tel que les compositions

$$x \xrightarrow{\mathrm{id}_x \otimes c} x \otimes \overline{x} \otimes x \xrightarrow{e \otimes \mathrm{id}_x} x, \quad \overline{x} \xrightarrow{c \otimes \mathrm{id}_{\overline{x}}} \overline{x} \otimes x \otimes \overline{x} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{x}} \otimes e} \overline{x}$$

soient l'identité.

Remarque 4.1. Plus exactement, dans une catégorie monoïdale, on dira que $\overline{x}$ est un *dual à droite* de x et que x est un *dual à gauche* de x. Dans une catégorie monoïdale symétrique, ces deux notions coïncident grâce au tressage.

Exemple 4.1. Soit R un anneau commutatif unitaire. On considère $\mathcal{C} = Mod_R$ la catégorie des R-modules. La structure monoïdale provient du produit tensoriel sur R que l'on note $\otimes_R$ et l'objet neutre est l'anneau R. Les éléments dualisables sont les modules projectifs de type fini [DP83]. On raisonne comme dans le cas des espaces vectoriels et on montre que si un module A est dualisable alors il est engendré par une famille finie $\{a_i\}_{1 \leq i \leq k}$ et qu'il existe une base duale $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq k}$ dans $Hom(A, R)$.

Exemple 4.2. Soit E un objet dualisable de ***Sets***. Il existe un triplet $(\overline{E}, e, c)$ formé d'un ensemble $\overline{E}$, d'une évaluation $e : E \times \overline{E} \to \{*\}$, d'une coévaluation $c : \{*\} \to \overline{E} \times E$, tel que les compositions

$$E \xrightarrow{\mathrm{id}_E \times c} E \times \overline{E} \times E \xrightarrow{e \times \mathrm{id}_E} E, \quad \overline{E} \xrightarrow{c \times \mathrm{id}_{\overline{E}}} \overline{E} \times E \times \overline{E} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\overline{E}} \times e} \overline{E}$$

soient l'identité. On pose $c(*) = (b, a)$. Soit $\alpha \in E$ et $\beta \in \overline{E}$, les images par les composées sont

$$\alpha \mapsto (\alpha, b, a) \mapsto a \quad \beta \mapsto (b, a, \beta) \mapsto b,$$

ainsi $a = \alpha$ et $b = \beta$. Donc $E = \overline{E} = \{*\}$. On vient de montrer que le seul élément dualisable de la catégorie des ensembles ***Sets*** est $\{*\}$. De façon analogue, on montre que dans une catégorie cartésienne (Exemple 1.4), le seul élément dualisable est l'objet terminal de la catégorie. Par exemple, l'espace topologique constitué d'un seul point est l'élément dualisable de ***Top*** et la catégorie avec un seul objet est l'élément dualisable de ***Cat***.

Dans cette partie, nous allons étendre cette notion aux (∞, n)-catégories monoïdales symétriques. Dans la définition suivante, on considère la catégorie homotopique $h\mathcal{C}$ c'est à dire la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et les morphismes $Hom_{h\mathcal{C}}(X, Y)$ entre deux objets $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ sont les classes d'isomorphisme d'objets dans l'$(\infty, n-1)$-catégorie $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Définition 4.2. Soit $\mathcal{C}$ une (∞, n)-catégorie monoïdale symétrique. Un objet $C \in \mathcal{C}$ est **dualisable** s'il possède un dual dans la catégorie homotopique $h\mathcal{C}$.

Dans le cas des espaces vectoriels $\mathbf{Vect}(k)$, les éléments dualisables sont les espaces vectoriels de dimension finie. Cette condition de finitude, suffisante en dimension $n = 1$ pour définir une TCQT, ne l'est plus en dimension supérieure. Il faut l'étendre aux k-morphismes pour $1 \leq k \leq n-1$. On définit pour cela la notion de morphismes *adjoints*.

Définition 4.3. Soit $\mathcal{C}$ une 2-catégorie. Soient $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ et deux 1-morphismes $f : X \to Y$, $g : Y \to X$. On dit que f est un **adjoint à gauche** de g (et g **adjoint à droite** de f) s'il existe deux 2-morphismes $u : \mathrm{id}_X \to g \circ f$ (appelé **unité d'adjonction**) et $v : f \circ g \to \mathrm{id}_Y$ (**counité d'adjonction**) tels que les composées

$$\begin{aligned} f &\simeq f \circ \mathrm{id}_X \xrightarrow{\mathrm{id} \times u} f \circ g \circ f \xrightarrow{v \times \mathrm{id}} \mathrm{id}_Y \circ f \simeq f, \\ g &\simeq \mathrm{id}_X \circ g \xrightarrow{u \times \mathrm{id}} g \circ f \circ g \xrightarrow{\mathrm{id} \times v} g \circ \mathrm{id}_Y \simeq g \end{aligned}$$

coïncident avec l'identité.

Remarque 4.2. Étant donné deux 1-morphismes adjoints $f : X \to Y, \quad g : Y \to X$ et une unité d'adjonction $u : \mathrm{id}_X \to g \circ f$, alors la counité $v : f \circ g \to \mathrm{id}_Y$ est unique. En effet, considérons deux 2-morphismes $v, v' : f \circ g \to \mathrm{id}_Y$ tels que les composées

$$\begin{aligned} f &\simeq f \circ \mathrm{id}_X \xrightarrow{\mathrm{id} \times u} f \circ g \circ f \xrightarrow{v \times \mathrm{id}} \mathrm{id}_Y \circ f \simeq f, \\ g &\simeq \mathrm{id}_X \circ g \xrightarrow{u \times \mathrm{id}} g \circ f \circ g \xrightarrow{\mathrm{id} \times v'} g \circ \mathrm{id}_Y \simeq g \end{aligned}$$

coïncident avec l'identité. Montrons que $v = v'$. Pour cela, on considère le 2-morphisme $w : f \circ g \to \mathrm{id}_Y$ obtenu par :

$$f \circ g \simeq f \circ \mathrm{id}_X \circ g \xrightarrow{u} f \circ (g \circ f) \circ g \simeq (f \circ g) \circ (f \circ g) \xrightarrow{u \times v'} \mathrm{id}_Y \circ \mathrm{id}_Y \simeq \mathrm{id}_Y.$$

Le 2-morphisme $v \times v'$ se décompose en

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) \xrightarrow{v \times \mathrm{id}} \mathrm{id}_Y \circ (f \circ g) \xrightarrow{v'} \mathrm{id}_Y.$$

Ainsi $w = v' \circ (w' \circ \mathrm{id}_g)$ où w' est la composée

$$f \simeq f \circ \mathrm{id}_x \xrightarrow{\mathrm{id} \times u} f \circ g \circ f \xrightarrow{v \times \mathrm{id}} \mathrm{id}_Y \circ f \simeq f.$$

Au vu de la propriété vérifiée par v, on a $w' = \mathrm{id}_f$ et donc $w = v'$. Par un raisonnement analogue, on montre que $w = v$ et donc que $v = v'$.

Exemple 4.3. Cette notion s'inspire de celle connue pour les foncteurs. $\boldsymbol{Cat}$ peut vue comme une 2-catégorie avec :

- pour objets les petites catégories,
- pour 1-morphismes les foncteurs entre petites catégories,
- pour 2-morphismes les transformations naturelles entre foncteurs.

Montrons que les 1-morphismes qui possèdent un adjoint sont les foncteurs ayant un adjoint. Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux 1-morphismes de $\boldsymbol{Cat}$. On suppose qu'il existe deux transformations naturelles $u : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F, \quad v : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ telles que les composées

$$\begin{aligned} F = F \circ \mathrm{id}_{\mathcal{C}} &\xrightarrow{\mathrm{id} \times u} F \circ G \circ F \xrightarrow{v \times \mathrm{id}} \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \circ F = F, \\ G = \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \circ G &\xrightarrow{u \times \mathrm{id}} G \circ F \circ G \xrightarrow{\mathrm{id} \times v} G \circ \mathrm{id}_{\mathcal{D}} = G \end{aligned}$$

coïncident avec l'identité. Soient $C \in \mathcal{C}$ et $D \in \mathcal{D}$, on dispose des applications

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{D}}(F(C), D) &\to Hom_{\mathcal{C}}(G \circ F(C), G(D)) \xrightarrow{\circ u_C} Hom_{\mathcal{C}}(C, G(D)), \\ Hom_{\mathcal{C}}(C, G(D)) &\to Hom_{\mathcal{D}}(F(C), F \circ G(D)) \xrightarrow{v_D \circ} Hom_{\mathcal{D}}(F(C), D). \end{aligned}$$

En les composant, on voit qu'elles sont inverses l'une de l'autre, donc F et G sont des foncteurs adjoints.

Exemple 4.4. On a vu qu'une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ est équivalente à une 2-catégorie $B\mathcal{C}$ avec un seul objet (Exemple 2.4). Avec cette identification, un élément est dualisable à droite dans $\mathcal{C}$ si et seulement si il possède un adjoint à droite en tant que 1-morphisme de $B\mathcal{C}$.

Définition 4.4. On dit que les 1-morphismes d'une 2-catégorie $\mathcal{C}$ possèdent des adjoints si tout 1-morphisme possède un adjoint à droite et à gauche.

Définition 4.5. Soit $\mathcal{C}$ une (∞, n)-catégorie. On définit sa **2-catégorie homotopique** $h_2\mathcal{C}$ avec :

- pour objets ceux de $\mathcal{C}$,
- pour 1-morphismes ceux de $\mathcal{C}$.
- Un 2-morphisme entre deux 1-morphismes $f, g : X \to Y$ est la classe d'isomorphisme d'un 2-morphisme entre f et g dans $\mathcal{C}$.

Définition 4.6. Soit $\mathcal{C}$ une (∞, n)-catégorie. On dit que les 1-morphismes de $\mathcal{C}$ possèdent des adjoints pour s'ils possèdent des adjoints dans $h_2\mathcal{C}$.
Pour $1 < k < n$, on dit que les k-morphismes de $\mathcal{C}$ possèdent des adjoints si pour toute paire X, Y de $\mathcal{C}$, les $(k-1)$-morphismes de l'$(\infty, n-1)$-catégorie possèdent des adjoints.
$\mathcal{C}$ possède des **adjoints** si tous ses k-morphismes $(0 < k < n)$ possèdent des adjoints.

Définition 4.7. Une (∞, n)-catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est **dualisable** si

- tout objet admet des duaux à droite et à gauche dans la catégorie homotopique $h\mathcal{C}$,
- $\mathcal{C}$ possède des adjoints.

Exemple 4.5. L'(∞, n)-catégorie symétrique monoïdale $Bord_n$ est dualisable. Un k-morphisme $f : X \to Y$ s'identifie à une k-variété orientée M dont le bord entrant est X et le bord sortant est Y. La variété $\overline{M}$ munie de l'orientation opposée induit un k-morphisme $g : Y \to X$, c'est un adjoint à droite et à gauche de f.

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{C}$ une (∞, n)-catégorie monoïdale symétrique. Il existe une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}^{fd}$ et un foncteur monoïdal symétrique $i : \mathcal{C}^{fd} \to \mathcal{C}$ tels que*

- *$\mathcal{C}^{fd}$ est dualisable,*
- *pour toute (∞, n)-catégorie $\mathcal{D}$ dualisable et foncteur monoïdal symétrique $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ il existe un unique (à isomorphisme près) foncteur monoïdal symétrique $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^{fd}$ tel que $F \simeq i \circ f$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed, "f"] & \mathcal{C} \\ & \mathcal{C}^{fd} \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

En pratique, on extrait $\mathcal{C}^{fd}$ de $\mathcal{C}$ en retirant les objets non-dualisables et les k-morphismes qui ne possède pas d'adjoint à droite et à gauche.

Définition 4.8. Soit $\mathcal{C}$ une (∞, n)-catégorie monoïdale symétrique. Un objet X de $\mathcal{C}$ est **pleinement dualisable** s'il est dans l'image $i : \mathcal{C}^{fd} \to \mathcal{C}$.

Proposition 4.2. *Les éléments pleinement dualisables de Alg_k (exemple 2.2) sont les algèbres semi-simples de dimension finie.*

On trouvera une preuve détaillée dans [Dav11] (Lemme 3.2.1).

4.2 Énoncé et conséquences

Dans cette partie, nous allons énoncer l'hypothèse du cobordisme dans le cadre des variétés parallélisables. Nous verrons ensuite un énoncé plus général. Commençons par introduire quelques notations.

Notation 4.1.
- Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des (∞, n)-catégories. L'ensemble des foncteurs $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est une (∞, n)-catégorie.
- Si de plus, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont monoïdales symétriques, on note $Fun^{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, l'$(\infty, n)$-catégorie des foncteurs monoïdaux symétriques.
- On note $\mathcal{C}^{\sim}$, l'$(\infty, 0)$-catégorie obtenue en retirant les morphismes non-inversibles de $\mathcal{C}$.

On peut à présent généraliser la notion de théorie des champs quantique.

Définition 4.9. Soit $\mathcal{C}$ une (∞, n)-catégorie monoïdale symétrique. Une **théorie des champs quantique étendue** est un foncteur monoïdal symétrique

$$F : Bord_n^{fr} \to \mathcal{C}.$$

Théorème 4.1 (Hypothèse du cobordisme)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une (∞, n)-catégorie monoïdale symétrique. L'application suivante est une équivalence d'(∞, n)-catégories :*

$$\begin{gathered} Fun^{\otimes}(Bord_n^{fr}, \mathcal{C}) \to (\mathcal{C}^{fd})^{\sim} \\ F \mapsto F(pt_+). \end{gathered}$$

En particulier, $Fun^{\otimes}(Bord_n^{fr}, \mathcal{C})$ est une $(\infty, 0)$-catégorie.

Rappelons que $Bord_n^{fr} = Bord_n^{\{1\}}$ est un cas particulier de variétés munies d'une G-structure. Le théorème énoncé ci-dessus est un corollaire du résultat suivant.

Théorème 4.2. *Soient $\mathcal{C}$ une (∞, n)-catégorie monoïdale symétrique et $\xi : G \to O(n)$ un morphisme de groupes continu. Il y a une équivalence d'(∞, n)-catégories :*

$$Fun^{\otimes}(Bord_n^G, \mathcal{C}) \to ((\mathcal{C}^{fd})^{\sim})^{hG},$$

où $(.)^{hG}$ désigne l'ensemble des points fixes homotopiques.
En particulier, $Fun^{\otimes}(Bord_n^G, \mathcal{C})$ est un ∞-groupoïde $(\infty, 0)$.

Définition 4.10. Soit G un groupe topologique qui agit de façon continu sur un espace topologique X. L'ensemble des **points fixes homotopiques** est défini par

$$X^{hG} := Hom_G(EG, X),$$

les morphismes G-équivariants.

Nous allons regarder de plus près le cas $\mathcal{C} = Alg_k$ (Exemple 2.2) et $G = SO(2)$. Commençons par définir une action d'un groupe sur une bicatégorie. Les résultats suivants font intervenir les notions de *2-foncteur monoïdal faible*, *transformation pseudo-naturelle* dont on trouvera les définitions dans [Lei04].

Définition 4.11. Soit G un groupe topologique et $\mathcal{C}$ une bicatégorie. Une G-actions sur $\mathcal{C}$ est un 2-foncteur monoïdal faible entre bicatégories :

$$\rho : \Pi_{\leq 2}(G) \to Aut(\mathcal{C}),$$

où $Aut(\mathcal{C})$ désigne les équivalences de catégories $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Il faut calculer le 2-groupoïde fondamental $\Pi_{\leq 2}SO(2)$.
Remarquons que $Sing(SO(2))$ est homotopiquement équivalent en tant que complexe de Kan au nerf $N(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}})$ où $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ est la catégorie avec un seul objet $*$ et pour morphismes $Hom_{B\mathbb{Z}}(*, *) = \mathbb{Z}$. Ceci est dû au fait que les espaces topologiques $|N(B\mathbb{Z})|$ et $SO(2)$ sont homotopiquement équivalents au cercle $\mathbb{S}^1$ (Exemple A.9).
Nous sommes ainsi ramenés à calculer le 2-groupoïde fondamental de $N(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}})$.
Rappelons (A.6) que le k^{e} niveau de cet ensemble simplicial est $\mathbb{Z}^{\times k}$. D'après la définition du 2-groupoïde fondamental (Exemple 2.3), la bicatégorie $\Pi_{\leq 2}SO(2)$ est constituée

- d'un seul objet que l'on notera e.
- Ses 1-morphismes s'identifient aux 1-simplexes de $N(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}})$, donc à $\mathbb{Z}$.
- Les 2-morphismes entre deux 1-simplexes g, h sont les classes d'équivalence d'homotopie $H : \Delta^1 \times \Delta^1 \to N(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}})$ entre g et h.

Soient $g, h \in \mathbb{Z}$, on va définir une homotopie $H : \Delta^1 \times \Delta^1 \to N(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}})$.
Les k-simplexes non-dégénérés $(0 \leq k \leq 2)$ de $\Delta^1 \times \Delta^1$ sont représentés dans la figure suivante. On trouvera des explications dans [Fri12].
Pour définir H, il suffit de préciser leurs images, sans oublier que le morphisme doit commuter avec les applications faces et dégénérescences. On pose

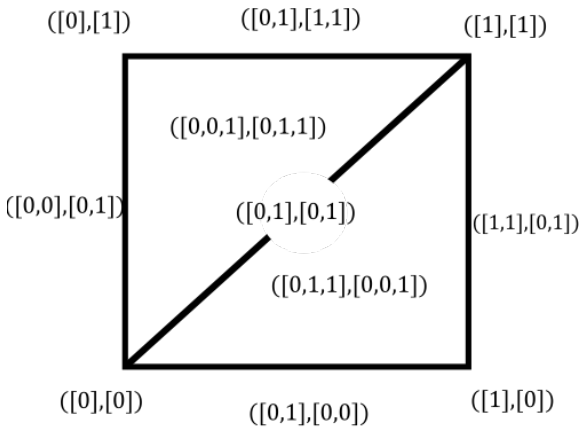


FIGURE 3 – Les simplexes non dégénérés de $\Delta^1 \times \Delta^1$

- $H([0],[0]) = H([0],[1]) = H([1],[0]) = H([1],[1]) = e$,
- $H([1,1],[0,1]) = H([0,0],[0,1]) = e$,
- $H([0,1],[0,0]) = g$ et $H([0,1],[1,1]) = h$,
- $H([0,1,1],[0,0,1]) = (g,e)$ et $H([0,0,1],[0,1,1]) = (e,h)$.

Vérifions si l'homotopie est bien définie. On a

$$e = d_0(g,e) = d_0(H([0,1,1],[0,0,1])) = H(d_0[0,1,1], d_0[0,0,1]) = H([1,1],[0,1]) = e,$$

$$g = d_2(g,e) = d_2(H([0,1,1],[0,0,1])) = H(d_2[0,1,1], d_2[0,0,1]) = H([0,1],[0,0]) = g,$$

$$h = d_0(e,h) = d_0(H([0,0,1],[0,1,1])) = H(d_0[0,0,1], d_0[0,1,1]) = H([0,1],[1,1]) = h.$$

Il nous reste à préciser $H([0,1],[0,1])$. Remarquons que

$$g = g.e = d_1(g,e) = d_1(H([0,1,1],[0,0,1])) = H(d_1[0,1,1], d_1[0,0,1]) = H([0,1],[0,1]),$$

$$h = d_1(e,h) = d_1(H([0,0,1],[0,1,1])) = H(d_1[0,0,1], d_1[0,1,1]) = H([0,1],[0,1]).$$

Ainsi, H est bien définie si et seulement si $g = h$. Finalement, on a montré que les seuls 2-morphismes de $\Pi_{\leq 2}N(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}})$ sont les identités.

Remarque 4.3. Soit $\mathcal{C}$ une bicatégorie et $\alpha : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}\mathcal{C}$ une transformation pseudo-naturelle. En déroulant la définition d'une action de groupe (on trouvera les détails dans [Hes17]) et grâce à l'identification donnée ci-dessus, une $SO(2)$-action est définie de la façon suivante.

- A tout élément du groupe $g \in SO(2)$ on associe le foncteur identité de $\mathcal{C}$,

– au générateur $1 \in \mathbb{Z}$, on associe α,
– les 2-morphismes sont envoyés sur les 2-morphismes de $\mathcal{C}$ correspondant à l'identité.

On dira que l'action de $SO(2)$ est triviale si α est l'identité.

On dispose du résultat suivant.

Proposition 4.3. *Soit $\mathcal{C} = (Alg^{fd})^{\sim}$ muni de l'action triviale de $SO(2)$. Alors l'ensemble des points fixes homotopiques $\mathcal{C}^{hSO(2)}$ est équivalent à la bicatégorie des algèbres de Frobenius commutatives semi-simples et de dimension finie.*

Il s'agit du corollaire 2.36 de [Hes17]. On y trouvera une preuve détaillée ainsi qu'un résultat plus général pour une action quelconque de $SO(2)$.

Application 4.1. Soit G un groupe de Lie compact et BG un espace classifiant. On peut montrer qu'une classe dans $H^{n+1}(BG, \mathbb{Z})$ détermine une n-TCQT pour $n = 1, 2, 3$. Pour $n = 3$, il s'agit d'une théorie de Chern-Simons, on dira qu'il s'agit d'une 2-3 théorie pour préciser les dimensions des variétés. L'article [Fre+09] de Freed, Hopkins, Lurie et Teleman traite les cas où G est un groupe fini ou le tore. Dans ce dernier cas, un théorème de Reshetikhin et Turaev permet d'étendre la théorie de Chern-Simons en une 1-2-3 théorie. Les auteurs cités ci-dessus vont encore plus loin et obtiennent des 0-1-2-3 théories. Grâce à l'hypothèse du cobordisme, pour définir une 0-1-2-3 théorie (une 3-TCQT étendue) il suffit de préciser la valeur en un point (il faut que ce soit un élément dualisable). Ainsi, l'hypothèse du cobordisme est un outil remarquable qui permet de ramener l'étude d'un élément complexe à celui d'un objet plus accessible.

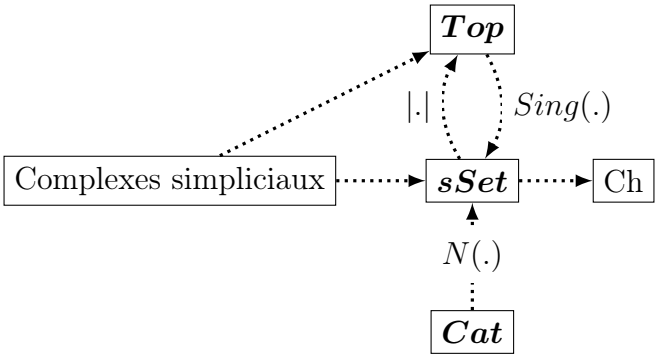
Appendices

A Ensembles simpliciaux

Les ensembles simpliciaux jouent un rôle central en topologie algébrique qui est représenté en partie dans le diagramme ci-dessous. Nous rappelons leurs principales propriétés.

A.1 Complexes simpliciaux

Les ensembles simpliciaux apparaissent comme généralisation des complexes simpliciaux dont nous rappelons la définition.



Définition A.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un n**-simplexe géométrique** est l'enveloppe convexe de $n+1$ points $\{x_0, \ldots, x_n\}$ **géométriquement indépendants** d'un espace affine, c'est à dire tels que la famille $\{\overleftarrow{x_1 x_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ soit libre. On le notera $[x_0, \ldots, x_n]$.
Les points x_i sont les **sommets** du simplexe. On appelle **face** l'enveloppe convexe de tout sous-ensemble de $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

Définition A.2. Le n**-simplexe standard** (géométrique) est donné par

$$|\Delta^n| = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i x_i = 1, x_i \geq 0\}.$$

Il sera également noté $[0, \ldots, n]$.

Définition A.3. Un **complexe simplicial** (géométrique) X de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de simplexes de $\mathbb{R}^n$ tels que

- toutes les faces d'un simplexe sont dans X,
- l'intersection de deux simplexes non disjoints est une face commune au deux.

Il peut être intéressant d'organiser ces informations sous forme combinatoire. Notons X^0 l'ensemble des sommets d'un complexe simplicial et X^k l'ensemble des k-simplexes pour $k \in \mathbb{N}$. Remarquons que tout k-simplexe s'interprète comme un sous-ensemble à $(k+1)$ éléments de X^0. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition A.4. Un **complexe simplicial abstrait** est la donnée de

- un ensemble de sommets X^0,
- un ensemble X^k, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, constitué de sous-ensembles de X^0 de cardinal $k+1$ (qu'on appellera k**-simplexe abstrait**) tels que tout sous-ensemble à $(j+1)$ éléments d'un élément de X^k appartient à X^j.

Un complexe simplicial géométrique définit un complexe simplicial abstrait. Inversement, à tout sommet d'un complexe simplicial abstrait on associe un point.

Un k-simplexe abstrait $[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}]$ induit un simplexe géométrique en considérant l'enveloppe convexe des points associés aux sommets. Il faut ensuite recoller les simplexes avec des sommets en commun via la topologie quotient. On remarquera que dans les deux cas, la structure d'un complexe simplicial est entièrement déterminée par ses sommets. Il nous arrivera donc de parler de complexe simplicial sans préciser s'il est géométrique ou abstrait.

Etant donné un simplexe, on dispose d'applications (pas simpliciales) permettant de récupérer une de ses faces. Soient X un complexe simplicial et $[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]$ un n-simplexe, sa j^{e} face est

$$d_j[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}] = [x_{i_0}, \ldots \widehat{x_{i_j}}, \ldots, x_{i_n}] = [x_{i_0}, \ldots x_{i_{j-1}}, x_{i_{j+1}}, \ldots, x_{i_n}].$$

On définit ainsi une famille d'applications $d_0, \ldots, d_n : X^{n+1} \to X^n$.

Définition A.5. Soit X, Y deux complexes simpliciaux géométriques. Une **application simpliciale** $f : X \to Y$ est une application qui envoie tout simplexe de X sur un simplexe de Y. Elle est donc caractérisée par les images des sommets de X.

Dorénavant, on considère des simplexes ordonnés, c'est à dire qu'on munit l'ensemble des sommets d'une relation d'ordre totale. L'écriture $[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}]$ désignera un k-simplexe si et seulement si $x_{i_j} < x_{i_k}$, $\forall j < k$. Ainsi, tout k-simplexe d'un complexe simplicial est l'image du k-simplexe standard par une unique application simpliciale.

Exemple A.1. Il existe des applications simpliciales qui "écrase" les simplexes. Par exemple, soit l'application simpliciale entre simplexes standards $f : [0, 1, 2] \to [0, 1]$ donnée par $f(0) = 0$ et $f(1) = f(2) = 1$.

Les ensembles simpliciaux vont nous permettre de prendre en compte ces singularités. Une façon naturelle de noter l'image de $[0, 1, 2]$ par f est $[0, 1, 1]$ puisque l'on fait apparaître clairement les images de chaque sommet. Mais, cela n'est pas accepté dans nos conventions où on suppose que l'ensemble des sommets est muni d'un ordre total. C'est ce qu'on appellera un *simplexe dégénéré*, intuitivement il s'agit d'un simplexe dont la réalisation géométrique n'a pas la bonne dimension. Le 2-simplexe $[0, 1, 1]$ est caché dans le 1-simplexe géométrique $[0, 1]$.

A.2 Définitions et premier résultats

Les ensembles simpliciaux prolongent l'approche combinatoire présentée ci-dessus.

Définition A.6. On définit la **catégorie simpliciale $\boldsymbol{\Delta}$** avec :

- pour objets les ensembles ordonnés $[n] = \{0 < 1 < \ldots < n-1 < n\}$,
- et les morphismes entre deux éléments $[m]$ et $[n]$ sont les applications $\alpha : [m] \to [n]$ préservant l'ordre, c'est à dire telles que $\forall 0 \leq i \leq j \leq m$ on a $0 \leq \alpha(i) \leq \alpha(j) \leq n$.

Définition A.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un **objet simplicial** de $\mathcal{C}$ est un foncteur

$$X : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathcal{C}.$$

On le notera $X_\bullet$ et son n^{e} **niveau** est $X_n := X([n])$.
En particulier, on parle de :

- **ensemble simplicial** lorsque $\mathcal{C} = \boldsymbol{Sets}$,
- **espace simplicial** lorsque $\mathcal{C} = \boldsymbol{Top}$.

On va donner une présentation combinatoire qui permet de voir en quoi ceci généralise les complexes simpliciaux.

Notation A.1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$ et $X_\bullet$ un objet simplicial.
On note $\delta^i : [n-1] \to [n]$ l'unique injection croissante dont l'image ne contient pas l'élément i, elle est définie explicitement par

$$\delta^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i. \end{cases}$$

Le foncteur $X_\bullet$ induit une application $d_i : X_n \to X_{n-1}$ appelée i^{e} **face**.
On note $\sigma^i : [n+1] \to [n]$ l'unique surjection croissante telle que $\sigma(i) = \sigma(i+1) = i$, elle est définie explicitement par

$$\sigma^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Ceci induit une application $s_i : X_n \to X_{n+1}$ appelé i^{e} **dégénérescence**.

Proposition A.1. *Soit $X_\bullet$ un objet simplicial. Les applications faces et dégénérescences vérifient les* ***identités simpliciales*** *suivantes :*

- *Pour $n \geq 2$ et $0 \leq i \leq j \leq n$, on a $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$,*
- *Pour $0 \leq i \leq j \leq n$, on a $s_i \circ s_j = s_{j+1} \circ s_i$,*
- *Pour $0 \leq i \leq j \leq n$, on a*

$$d_i \circ s_j = \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & \textit{si } i < j, \\ \mathrm{id}_{X_n} & \textit{si } i = j \textit{ ou } i = j+1, \\ s_j \circ d_{i-1} & \textit{si } i > j+1. \end{cases}$$

Inversement, une famille d'objets $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *de* $\mathcal{C}$ *et des morphismes* $\{d_i : X_n \to X_{n-1}\}_{0\leq i\leq n}$, $\{s_i : X_n \to X_{n+1}\}_{0\leq i\leq n}$ *vérifiant les identités simpliciales détermine un unique objet simplicial* $X_\bullet$.

Nous sommes en mesure de formaliser les remarques faites au sujet des applications simpliciales d'écrasement (Ex A.1).

Définition A.8. Soient $X_\bullet$ un ensemble simplicial et $\sigma \in X_n$, un n-simplexe. On dit que σ est **dégénéré** s'il existe $0 \leq i \leq n$ tel que σ soit dans l'image de la dégénérescence $s_i : X_{n-1} \to X_n$.

On donne à présent quelques exemples d'objets simpliciaux.

Exemple A.2. Commençons par voir que tout complexe simplicial ordonné X induit un ensemble simplicial $\tilde{X}$ en lui rajoutant tout les simplexes dégénérés. Soit $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$ un simplexe de X alors $\tilde{X}$ contient tous les simplexes de la forme $[x_{i_1}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_m}]$ avec autant de répétitions de sommets que souhaité.
Pour le 1-simplexe standard $X = [0, 1]$ on a $\tilde{X}_2 = \{[0, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 1, 1]\}$.

Exemple A.3. L'ensemble simplicial $\Delta^n : \Delta^{op} \to Set$ défini par

$$\Delta^n([m]) = Hom_\Delta([m], [n])$$

est appelé n**-simplexe standard**.
Il correspond à l'ensemble simplicial induit par le complexe simplicial $[0, 1, \ldots, n]$.

Exemple A.4. Soit $n \in \mathbb{N}$, le **bord** de Δ^n est l'ensemble simplicial $\partial\Delta^n : \Delta^{op} \to Set$ défini par

$$\partial\Delta^n([m]) = \{\alpha \in Hom_\Delta([m], [n]) : \alpha \text{ n'est pas surjective.}\}.$$

Exemple A.5. Le **nerf** d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ est l'ensemble simpliciale $N(\mathcal{C})_\bullet$ défini par $N(\mathcal{C})_n = Fun([n], \mathcal{C})$. Autrement dit, l'ensemble $N(\mathcal{C})_n$ est l'ensemble de n morphismes composables

$$C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} C_n.$$

Précisons les faces et les dégénérescences.
La i^{e} face $d_i : N(\mathcal{C})_n \to N(\mathcal{C})_{n-1}$ envoie le n-uplet

$$C_0 \xrightarrow{f_1} \ldots C_{i-1} \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{f_{i+1}} C_{i+1} \ldots \xrightarrow{f_n} C_n$$

sur le $(n-1)$-uplet

$$C_0 \xrightarrow{f_1} \ldots C_{i-1} \xrightarrow{f'} C_{i+1} \ldots \xrightarrow{f_n} C_n$$

où $f' = f_{i+1} \circ f_i$. Lorsque $i = 0$ ou n, la i^{e} face supprime le i^{e} objet.
La i^{e} dégénérescence $s_i : N(\mathcal{C})_n \to N(\mathcal{C})_{n+1}$ envoie le n-uplet

$$C_0 \xrightarrow{f_1} \dots C_{i-1} \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{f_{i+1}} C_{i+1} \dots \xrightarrow{f_n} C_n$$

sur le $(n+1)$-uplet obtenu en rajoutant l'identité

$$C_0 \xrightarrow{f_1} \dots C_{i-1} \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{\text{id}} C_i \xrightarrow{f_{i+1}} C_{i+1} \dots \xrightarrow{f_n} C_n.$$

Exemple A.6. Soit G un groupe. On note $\mathcal{C}_G$ la catégorie avec un seul objet $*$ et $Hom_{\mathcal{C}_G}(*,*) = G$. Le nerf $N(\mathcal{C}_G)$ coïncide avec l'ensemble simplicial $X_\bullet$ dont les niveaux sont donnés par $X_n = G \times G \times \dots \times G = G^{\times n}$. $G^{\times 0}$ désigne le groupe trivial $\{e\}$. Les dégénérescences s'obtiennent en rajoutant l'élément neutre

$$\begin{aligned} s_i : \quad & G^{\times n} \to G^{\times (n+1)} \\ & (g_1, \dots, g_i, \dots, g_n) \mapsto (g_1, \dots, g_i, e, \dots, g_n). \end{aligned}$$

Les faces s'obtiennent par le produit

$$\begin{aligned} d_i : \quad & G^{\times n} \to G^{\times (n-1)} \\ & (g_1, \dots, g_i, \dots, g_n) \mapsto (g_1, \dots, g_{i+1}.g_i, g_{i+2}, \dots, g_n), \end{aligned}$$

Lorsque $i = 0$ ou n, la i^{e} face supprime le i^{e} élément.

Exemple A.7. Soient X un espace topologique et $n \in \mathbb{N}$. On appelle n-simplexe singulier tout application continue $\sigma : |\Delta^n| \to X$. On note

$$Sing_n(x) = Hom_{\boldsymbol{Top}}(|\Delta^n|, X),$$

l'ensemble des n-simplexes singuliers.
Le foncteur

$$\begin{aligned} Sing_\bullet(X) : \quad & \boldsymbol{\Delta} \to \boldsymbol{Sets} \\ & [n] \mapsto Sing_n(X) \end{aligned}$$

est un ensemble simplicial.

Exemple A.8. Soit X un espace topologique. On définit le groupe simplicial $C_\bullet X$ avec pour n^{e} niveau $C_n X$ le groupe abélien libre engendré par $Sing_n(X)$.
On définit l'homologie singulière $H_*(X;\mathbb{Z})$ comme l'homologie du complexe de chaînes $(C_\bullet X, \partial)$ où la différentielle est donnée par

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i \sigma.$$

avec $d_i\sigma(x_0, \dots x_n) = (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$.

Définition A.9. Les ensembles simpliciaux forment une catégorie $\boldsymbol{sSets}$ où un morphisme entre deux ensembles simpliciaux $X_\bullet,\ Y_\bullet : \boldsymbol{\Delta}^{op} \to \boldsymbol{Sets}$ est une transformation naturelle $\eta : X_\bullet \Rightarrow Y_\bullet$.

Un morphisme d'ensembles simpliciaux est donc la donnée d'une famille d'applications $\eta_n : X_n \to Y_n$ qui commutent avec les applications faces et dégénérescences. Rappelons qu'une application simplicial entre complexes simpliciaux est déterminée par l'image des sommets mais ce n'est pas le cas ici. Néanmoins, on va voir qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux est déterminé par les images d'un certain nombre de simplexes. On énonce un cas particulier du lemme de Yoneda.

Proposition A.2 (Yoneda)**.** *Soit $X : \boldsymbol{\Delta}^{op} \to \boldsymbol{Sets}$ un ensemble simplicial. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une bijection $Hom_{sSets}(\Delta^n, X) \simeq X_n$.*

Proposition A.3. *Soient $X_\bullet$ un ensemble simplicial et $\sigma \in X_n$, un n-simplexe. On l'identifie avec un morphisme d'ensembles simpliciaux $\overline{\sigma} : \Delta^n \to X_\bullet$. σ est dégénéré si et seulement si $\overline{\sigma}$ se factorise en $\Delta^n \to \Delta^m \to X_\bullet$.*

Pour définir un morphisme d'ensembles simpliciaux il suffit de préciser les images des simplexes non-dégénérés puisqu'on a $\eta_n(s_i(x)) = s_i(\eta_n(x))$.

A.3 Réalisation

Soit X un espace topologique. On a la bijection suivante

$$Sing_n(X) = Hom_{\boldsymbol{Top}}(|\Delta^n|, X) \simeq Hom_{\boldsymbol{sSets}}(\Delta^n, Sing_\bullet(X)).$$

En effet, par le lemme de Yoneda tout morphisme d'ensembles simpliciaux entre Δ^n et $Sing_\bullet(X)$ détermine un n-simplexe de $Sing_\bullet(X)$.
On souhaite définir un foncteur $|.|$ de telle sorte qu'on ait un résultat similaire pour des ensembles simpliciaux différents de Δ^n.

Définition A.10. Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial. On munit chaque ensemble X_n de la topologie discrète. La **réalisation** $|X|$ est donné par

$$|X| = \amalg_{n=0}^{\infty} (X_n \times |\Delta^n|)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par les identifications

$$\begin{array}{l} (x, \partial^i(p)) \sim (d_i(x), p) \text{ pour } x \in X_{n+1},\ p \in |\Delta^n| \\ (x, \sigma^i(p)) \sim (s_i(x), p) \text{ pour } x \in X_{n-1},\ p \in |\Delta^n|. \end{array}$$

On a identifié $|\Delta^n|$ avec l'ensemble ordonné $[n]$.

Exemple A.9. Soit G un groupe. On note $\mathcal{C}_G$ la catégorie avec un seul objet $*$ et $Hom_{\mathcal{C}_G}(*,*) = G$. La réalisation $|N(\mathcal{C}_G)|$ coïncide avec BG l'*espace classifiant* de G (Définition D.3).

Proposition A.4. *Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial, alors $|X|$ est un CW-complexe avec une n-cellule pour chaque n-simplexe non dégénéré de $X_\bullet$.*

Proposition A.5. *Soient $X_\bullet$ un ensemble simplicial et Y un espace topologique, alors*

$$Hom_{\boldsymbol{Top}}(|X|, Y) \simeq Hom_{\boldsymbol{sSets}}(X_\bullet, Sing_\bullet(Y)).$$

Autrement dit, les foncteurs $|.|$ et $Sing(.)$ sont adjoints.

A.4 Complexe de Kan

Définition A.11. Soient deux entiers $1 \leq i \leq n$, le i^{e} **cornet** de Δ^n est l'ensemble simplicial $\Lambda^n_i : \Delta^{op} \to Set$ défini par

$$\Lambda^n_i([m]) = \{\alpha \in Hom_\Delta([m],[n]) : [n] \nsubseteq \alpha([m]) \cup \{i\}\}.$$

On retiendra qu'en tant que complexe simplicial, Λ^n_i s'obtient à partir du n-simplexe standard $|\Delta^n| = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i x_i = 1, x_i \geq 0\}$ en retirant son intérieur et la face opposée au i^{e}sommet.

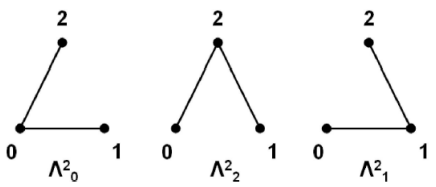


FIGURE 4 – Les cornets de Δ^2

Définition A.12. Un ensemble simplicial $X_\bullet$ est un **complexe de Kan** si tout morphisme d'ensemble simplicial $\Lambda^n_k \to X_\bullet$ se prolonge en un morphisme $\Delta^n \to X_\bullet$.

Exemple A.10. Le simplexe standard Δ^n n'est pas un complexe de Kan pour $n > 0$.

Exemple A.11. Soit X un espace topologique, l'ensemble simplicial $Sing_\bullet(X)$ est un complexe de Kan.

Grâce aux complexes de Kan, on va pouvoir définir une théorie de l'homotopie sur les ensembles simpliciaux.

A.5 Homotopie simpliciale

Un des intérêts des ensembles simpliciaux est de pouvoir traiter de façon combinatoire des problèmes d'homotopie.
On peut faire des analogies avec la théorie de l'homotopie pour les espaces topologiques en identifiant l'intervalle $I = [0, 1]$ avec l'ensemble simplicial Δ^1.

Définition A.13. Soient $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ deux ensembles simpliciaux. Leur produit $(X \times y)_\bullet$ est donné par

- $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$,
- pour $(x, y) \in (X \times Y)_n$, on a $d_i(x, y) = (d_i x, d_i y)$,
- pour $(x, y) \in (X \times Y)_n$, on a $s_i(x, y) = (s_i x, s_i y)$.

$$|X \times Y| \simeq |X| \times |Y|$$

Définition A.14. Un **chemin** dans un ensemble simplicial $X_\bullet$ est un morphisme $\Delta^1 \to X_\bullet$. De façon équivalente, par le lemme de Yoneda, c'est un 1-simplexe, $\gamma \in X_1$. On appelle origine (respectivement but) l'élément $\gamma[0] = d_1\gamma$ (respectivement $\gamma[1] = d_0\gamma$).
On dit que deux 0-simplexes $a, b \in X_0$ sont dans la même **composante connexe par arcs** s'il existe un chemin entre a et b. Ceci est une relation d'équivalence lorsque $X_\bullet$ est un complexe de Kan. L'ensemble des composantes connexes par arcs sera noté $\pi_0(X)$.

Définition A.15. Soient X, Y deux ensembles simpliciaux et $f, g : X \to Y$ deux morphismes d'ensembles simpliciaux. Une **homotopie** entre f et g est un morphisme d'ensembles simpliciaux $H : \Delta^1 \times X \to Y$ vérifiant $f = H_{|\{0\}\times X}$ et $g = H_{|\{1\}\times X}$.

On peut montrer que lorsque Y est un complexe de Kan, la relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

Définition A.16. Un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : X \to Y$ est une **équivalence homotopique** s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f$ (respectivement $f \circ g$) soit homotope à id_X (respectivement id_Y).

Définition A.17. Soit X un espace topologique et $x \in X$ un point. Soit $n \in \mathbb{N}$, le n^{e} **groupe d'homotopie** noté $\pi_n(X, x)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées $(\mathbb{S}^n, x_0) \to (X, x)$.

Définition A.18. Un morphisme entre espaces topologiques $f : X \to Y$ est une **équivalence faible homotopique** si

– pour tout $x \in X$ l'application $f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ est un isomorphisme pour $n \in \mathbb{N}^*$,
– $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection.

Définition A.19. Soit $X_\bullet$ un complexe de Kan et $x \in X_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, le n^{e} **groupe d'homotopie** noté $\pi_n(X, x)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $\alpha : \Delta^n \to X$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "\alpha"] & X \\ \partial\Delta^n \arrow[u, hook] \arrow[r] & \Delta^0 \arrow[u, "x"'] \end{tikzcd}$$

Définition A.20. Un morphisme entre complexes de Kan $f : X \to Y$ est une **équivalence faible** si

– pour tout $x \in X_0$ l'application $f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ est un isomorphisme pour $n \in \mathbb{N}^*$,
– $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection.

Proposition A.6. *Soit X un complexe de Kan. Le morphisme canonique $X \to Sing(|X|)$ est une équivalence faible.*

Proposition A.7. *Soit X un complexe de Kan et $x \in X_0$. On a des isomorphismes canoniques pour $n \geq 1$ entre $\pi_n(X, x)$ et $\pi(|X|, x)$. Ainsi, un morphisme de complexe de Kan $f : X \to Y$ est une équivalence faible si et seulement si l'application induite $|f| : |X| \to |Y|$ est une équivalence faible homotopique.*

B Catégories modèles

B.1 Définition et propriétés

Nous avons vu qu'il était possible de définir une théorie de l'homotopie sur la catégorie des ensembles simpliciaux. En fait, elle fait partie d'une famille plus large de catégories, les *catégories modèles* sur lesquelles il est possible de parler d'homotopie. Rappelons d'abord quelques définitions.

Définition B.1. – Soit un carré cartésien (pullback)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j'"] & X \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "i"] & Z. \end{tikzcd}$$

On dit que le morphisme i' est un **changement de base** de i le long de j et que le morphisme j' est un changement de base de j le long de i. On définit de façon analogue la notion de **changement de cobase** pour un carré cocartésien (pushout).

– Un **relèvement** du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

est une application $h : B \to x$ telle que $h \circ i = f$ et $p \circ h = g$. On dira que i a la **propriété de relèvement à gauche** (PRG) par rapport à p et que p a la **propriété de relèvement à droite** (PRD) par rapport à i.

– Soit X, Y deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. On dit que X est un **rétracte** de Y s'il existe des morphismes $i : X \to Y,\ r : Y \to X$ tels que $r \circ i = \mathrm{id}_X$.

– Un morphisme de $\mathcal{C}$, $f : X \to X'$ est un rétracte de $g : Y \to Y'$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "r'"] & X' \end{tikzcd}$$

avec $r \circ i = \mathrm{id}_X$ et $r' \circ i' = \mathrm{id}_{X'}$.

Définition B.2. Une **catégorie modèle** est une catégorie $\mathcal{C}$ avec trois familles de morphismes :

– les équivalences faibles ($\xrightarrow{\sim}$),

– les fibrations ($\twoheadrightarrow$)

– et les cofibrations ($\hookrightarrow$),

chacune contenant l'identité et fermée sous la composition. On appelle fibration acyclique (respectivement cofibration acyclique) une fibration (respectivement une cofibration) qui est également une équivalence faible. De plus, $\mathcal{C}$ vérifie les axiomes suivants :

1. Les limites et colimites finies existent.
2. Soient f et g des morphismes de $\mathcal{C}$, on suppose que leur composée existent. Si deux des trois morphismes $f, g, f \circ g$ sont des équivalences faibles (fibrations ou cofibrations) alors le troisième aussi.

3. Si f est un rétracte d'une équivalence faible (fibration, cofibration) alors f est une équivalence faible (fibration, cofibration).
4. Un relèvement du diagramme suivant existe dans ces deux cas
   - i est une cofibration et p une fibration acyclique,
   - i est une cofibration acyclique et p une fibration.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

5. Tout morphisme f peut se factoriser en $f = p \circ i$ de deux façons :
   - i est une cofibration et p une fibration acyclique,
   - i est une cofibration acyclique et p une fibration.

Exemple B.1. La catégorie des espaces topologiques ***Top*** est munie d'une structure de catégorie modèle où une application continue $f : X \to Y$ est

- une équivalence faible si f est une équivalence faible homotopique,
- une cofibration si f est un rétracte d'une application $X \to Y'$ où Y' est obtenu à partir de X en attachant des cellules,
- une fibration si f est une **fibration de Serre**. C'est à dire qu'elle a la PRD par rapport aux inclusions $I^n \times 0 \to I_n \times [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple B.2. La catégorie des ensembles simpliciaux ***sSets*** est munie d'une structure de catégorie modèle où un morphisme $f : X \to Y$ est

- une équivalence faible si $|f|$ est une équivalence faible homotopique,
- une cofibration si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : X_n \to Y_n$ est injective,
- une fibration si f est une **fibration de Kan**. C'est à dire qu'elle a la PRD par rapport aux inclusions $\Lambda^n_k \to \Delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$.

D'après le résultat suivant, si l'on connaît les fibrations et les équivalences faibles d'une catégorie modèle, alors les cofibrations sont automatiquement données.

Proposition B.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie modèle.*

- *Les cofibrations de $\mathcal{C}$ sont les morphismes qui ont la PRG par rapport au fibrations acycliques.*
- *Les cofibrations acycliques de $\mathcal{C}$ sont les morphismes qui ont la PRG par rapport au fibrations.*

– *Les fibrations de $\mathcal{C}$ sont les morphismes qui ont la PRD par rapport au cofibrations acycliques.*
– *Les fibrations acycliques de $\mathcal{C}$ sont les morphismes qui ont la PRD par rapport au cofibrations.*

Proposition B.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie modèle.*
– *L'ensemble des cofibrations de $\mathcal{C}$ est stable par changement de cobase.*
– *L'ensemble des cofibrations acycliques de $\mathbb{C}$ est stable par changement de cobase.*
– *L'ensemble des fibrations de $\mathcal{C}$ est stable par changement de base.*
– *L'ensemble des fibrations acycliques de $\mathcal{C}$ est stable par changement de base.*

Définition B.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie modèle avec comme objet initial $\emptyset$ et objet terminal $*$. Un objet X de $\mathcal{C}$ est **cofibrant** si $\emptyset \to X$ est une cofibration. Il est **fibrant** si $X \to *$ est une fibration.

Exemple B.3. Les complexes de Kan sont les objets fibrants de la catégorie modèle ***sSets***.

B.2 Homotopie

Il est possible de construire deux notions d'homotopie dans une catégorie modèle. Après les avoir définies, nous verrons dans quel cas elles coïncident. Dans toute la suite $\mathcal{C}$ désigne une catégorie modèle.

Définition B.4. Un **cylindre** de $A \in Obj(\mathcal{C})$ est un objet $A \times I$ muni de morphismes faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} A \amalg A \arrow[r, "\mathrm{id}_A + \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "i"] & A \\ A \times I \arrow[ur, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

Remarque B.1. $A \times I$ est une notation, ceci ne désigne pas nécessairement un produit.
Un cylindre existe toujours puisque tout morphisme peut s'obtenir comme composée d'une cofibration et d'une fibration acyclique.

Définition B.5. Deux morphismes $f, g : A \to X$ de $\mathcal{C}$ sont **homotopes à gauche** (noté $f \sim^g g$) s'il existe un cylindre $A \times I$ de A et un morphisme $H : A \times I \to X$, appelé **homotopie à gauche**, faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} A \amalg A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "i"] & X \\ A \times I \arrow[ur, "H"] & \end{tikzcd}$$

Proposition B.3. *Si un objet A est cofibrant alors $\sim^g$ est une relation d'équivalence sur $Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$. On note $\pi^g(A, X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ pour la relation d'homotopie à gauche.*

Proposition B.4. *Si A est cofibrant, la relation d'homotopie est stable par composition. C'est à dire si deux morphismes $f, g : A \to X$ sont homotopes à droite alors pour tout morphisme $h : X \to Y$, on a $h \circ f \sim^d h \circ g$.*

De façon duale, on définit une notion d'homotopie à droite.

Définition B.6. Un **objet de chemins** de $X \in Obj(\mathcal{C})$ est un objet X^I muni de morphismes faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)"] \arrow[d, "\sim"] & X \times X \\ X^I \arrow[ur, "p"] & \end{tikzcd}$$

Remarque B.2. La notation X^I ne désigne pas nécessairement un ensemble de fonctions. Un objet de chemins existe toujours puisque tout morphisme peut s'obtenir comme composée d'une cofibration acyclique et d'une fibration.

Définition B.7. Deux morphismes $f, g : A \to X$ de $\mathcal{C}$ sont **homotopes à droite** (noté $f \sim^d g$) s'il existe un objet de chemins X^I de X et un morphisme $H : A \to X^I$, appelé **homotopie à droite**, faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[dr, "H"] & X \times X \\ & X^I \arrow[u, "p"] \end{tikzcd}$$

Proposition B.5. *Si un objet X est fibrant alors $\sim^d$ est une relation d'équivalence sur $Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$. On note $\pi^d(A, X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ pour la relation d'homotopie à droite.*

Proposition B.6. *Si A est cofibrant, la relation d'homotopie est stable par composition. C'est à dire si deux morphismes $f, g : A \to X$ sont homotopes à droite alors pour tout morphisme $h : X \to Y$, on a $h \circ f \sim^d h \circ g$.*

Regardons à présent si une des deux notions implique l'autre.

Proposition B.7. *Soient $f, g : A \to X$ des morphismes de $\mathcal{C}$.*

- *Si A est cofibrant et $f \sim^g g$ alors $f \sim^d g$.*
- *Si X est fibrant et $f \sim^d g$ alors $f \sim^g g$.*

Ainsi, les deux notions coïncident sur $Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ lorsque A est cofibrant et X fibrant. On notera la relation d'équivalence $\sim$ et l'ensemble des classes d'équivalence sur $Hom_{\mathcal{A},\mathcal{X}}$ sera $\pi(A, X)$.

B.3 Catégorie homotopique

On va définir la catégorie homotopique $Ho(\mathcal{C})$ associée à une catégorie modèle $\mathcal{C}$. Pour cela, on considère les catégories $\pi\mathcal{C}$ dont

- $\pi\mathcal{C}_c$ constitué des objets cofibrants de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les classes d'homotopie à droite,
- $\pi\mathcal{C}_f$ constitué des objets fibrants de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les classes d'homotopie à gauche et
- $\pi\mathcal{C}$ constitué des objets à la fois fibrants etcofibrants de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les classes d'homotopie.

Soit $X \in Obj(\mathcal{C})$, le morphisme $\emptyset \to X$ se factorise en

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\ QX \arrow[ur, two heads, "\sim"] & \end{tikzcd}$$

où QX est cofibrant. De même, le morphisme $X \to *$ se factorise en

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, hook, "\sim"] & * \\ RX \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

où RX est fibrant. Si X est cofibrant alors $X = QX$ et si X est fibrant alors $X = RX$.

Proposition B.8. *Il existe un foncteur $Q : \mathcal{C} \to \pi\mathcal{C}_c$ qui envoie $X \to QX$ et un morphisme $f : X \to Y$ sur sa classe dans $\pi^d(QX, QY)$.*

Proposition B.9. *Il existe un foncteur $R : \mathcal{C} \to \pi\mathcal{C}_f$ qui envoie $X \to RX$ et un morphisme $f : X \to Y$ sur sa classe dans $\pi^g(RX, RY)$.*

Définition B.8. La catégorie homotopique $Ho(\mathcal{C})$ d'une catégorie modèle $\mathcal{C}$ est la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et pour deux objets X, Y, les morphismes

$$Hom_{Ho(\mathcal{C})}(X, Y) = \pi(RQX, RQY).$$

Proposition B.10. *Les foncteurs $|.|$ et $Sing(.)$ induisent une équivalence entre les catégories $Ho(\boldsymbol{sSets})$ et $Ho(\boldsymbol{Top})$.*

C Théorème de fibration de Ehresmann

Le but de cette partie est de prouver le théorème de fibration d'Ehresmann et de donner une application qui intervient dans la preuve de la proposition 3.5. Pour cela nous aurons besoin de résultats concernant les flots associés aux champs de vecteurs d'une variété.

C.1 Champs de vecteurs et flots d'une variété

On commence par définir la notion d'espace tangent pour une variété abstraite.

Définition C.1. Soient M une variété lisse et $m \in M$. On munit l'ensemble des morphismes de variétés définis sur un voisinage de m à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'une relation d'équivalence :

$$\underset{\text{défini sur } V_1}{f_1} \sim \underset{\text{défini sur } V_2}{f_2} \iff \exists \underset{\text{ouvert de } M \text{ contenant } m}{W} \subset V_1 \cap V_2 : f_{1|W} = f_{2|W}.$$

On note $(\mathcal{O}_M)_m$ l'ensemble des classes d'équivalence. La classe d'un morphisme f dans $(\mathcal{O}_M)_m$ s'appelle le **germe** de f en m et est notée $\dot{f}$.

Définition C.2. Soit M une variété lisse et $\gamma : \mathbb{R} \to M$ une courbe lisse telle que $\gamma(0) = m \in M$. On se donne une application lisse $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage U de m. La **dérivée directionnelle** de f le long de γ au point m est

$$D_\gamma(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\gamma(h)) - f(m)}{h}.$$

L'opérateur $D_\gamma : (\mathcal{O}_M)_m \to \mathbb{R}$ est le **vecteur tangent** à M, le long de γ en m.
On note aussi la dérivée directionnelle $D_\gamma = [\gamma]$ ou encore $[t \mapsto \gamma(t)]$.
L'**espace tangent** de M est l'espace vectoriel $T_m M$ constitué de l'ensemble des vecteurs tangents à M en m.

Exemple C.1. On prend $M = \mathbb{R}^n$. Soit $m \in \mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur un voisinage U de m. La i^{e} dérivée directionnelle de f au point m est

$$D_{i,m}(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(m + he_i) - f(m)}{h}.$$

On note D_i, l'opérateur

$$\begin{aligned} D_i : \quad & \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n \\ & m \mapsto D_{i,m} \end{aligned}$$

On peut à présent définir la différentielle d'une application entre variétés.

Définition C.3. Soit $\psi : M \to N$ une application lisse entre deux variétés lisses. La **différentielle** de ψ en $m \in M$ est la fonction

$$\begin{aligned} d_m\psi : \quad T_mM &\to T_{\psi(m)}M \\ D_\gamma &\mapsto D_{\psi\circ\gamma} \end{aligned}$$

Remarque C.1. Lorsque M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, l'injection

$$\begin{aligned} T_mM &\to \mathbb{R}^n \\ D_\gamma &\mapsto \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)_{|t=0} \end{aligned}$$

identifie T_mM avec l'espace tangent connu pour les sous-variétés (T_mM).
Les variétés que l'on considère sont plongées dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie, il nous arrivera d'identifier l'espace tangent avec son image par l'injection donnée ci-dessus.

Définition C.4. Un **champ de vecteurs** d'une variété lisse M est une fonction ξ telle que $\xi(m) \in T_mM,\ \forall m \in M$ et qui est lisse. C'est à dire qu'étant donné un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ sur un voisinage de m on a

$$\xi(m) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec ξ_i des fonctions lisses.

Définition C.5. Un **flot** (lisse) sur une variété lisse M est une application lisse $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ telle que :

- $\phi(0, m) = m,\ \forall m \in M$,
- $\phi(s + t, m) = \phi(s, \phi(t, m))$ pour tout $m \in M$ et $s, t \in \mathbb{R}$.

Remarque C.2. Un flot d'une variété M est une action du groupe additif $\mathbb{R}$ sur M. La famille ϕ_t définie par

$$\begin{aligned} \phi_t : \quad M &\to M \\ m &\mapsto \phi(t, m) \end{aligned}$$

est aussi appelé **groupe de difféomorphismes à un paramètre**.

Remarque C.3. Un flot ϕ engendre un champ de vecteurs ξ. A tout point m de M, on associe $\xi(m) = D_\gamma$, le vecteur tangent à M le long de la courbe $\gamma(t) = \phi(t, m)$ en $\gamma(0) = m$.

Pour pouvoir associer un flot à un champ de vecteur on a besoin du résultat suivant concernant l'existence et l'unicité de solutions pour des équations différentielles ordinaires. On trouvera les détails dans [Dem16].

Théorème C.1. *Soient $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application lisse où $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert et $p \in U$.*

- ***Existence :*** *Il existe un voisinage $V \subseteq U$ de p, un voisinage J de $0 \in \mathbb{R}$ et une application lisse $\phi : J \times V \to U$ tels que*

$$\begin{cases} \phi(0,q) = q, \ \forall q \in V, \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,q) = f(\phi(t,q)), \ \forall (t,q) \in J \times V. \end{cases} \tag{4}$$

- ***Unicité :*** *Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \to U$ des courbes lisses, où I est un intervalle centré en 0, telles que*
  - $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$,
  - $\gamma_i'(t) = f(\gamma_i(t)), \quad i = 1, 2$

  alors $\gamma_1 = \gamma_2$ sur I.

Remarque C.4. Soit ϕ une solution de (4), alors l'unicité de la solution nous dit que $\phi(s+t,q) = \phi(s, \phi(t,q))$ pour s, t suffisamment petits. En effet, si on pose $\gamma_1(s) = \phi(s+t,q)$ et $\gamma_2(s) = \phi(s, \phi(t,q))$ avec t fixé, alors $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_i'(t) = f(\gamma_i(t))$ pour $i = 1, 2$ d'où $\gamma_1 = \gamma_2$.

Proposition C.1. *Soit ξ un champ de vecteur lisse d'une variété M qui s'annule en dehors d'un compact $K \subset M$. Alors il existe un flot sur M qui engendre ξ.*

Démonstration. Étant donné une courbe $c : \mathbb{R} \to M$, on définit le vecteur *vitesse* $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} \in T_{c(t)}M$ par

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h} \text{ avec } f \in (\mathcal{O}_M)_{c(t)}.$$

Soit $m \in M$, supposons qu'il existe un flot ϕ engendrant ξ, alors la fonction $t \mapsto \phi_t(m)$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\phi_t(m)}{\mathrm{d}t} = \xi(\phi_t(m)) \\ \phi_0(m) = m. \end{cases}$$

En effet, pour $f \in (\mathcal{O}_M)_m$ on a

$$\frac{\mathrm{d}\phi_t(m)}{\mathrm{d}t}(f) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\phi_{t+h}(m)) - f(\phi_t(m))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\phi_h(\phi_t(m))) - f(\phi_t(m))}{h} = \xi(\phi_t(m))(f).$$

Si on considère un système de coordonnées locales $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ sur un voisinage de $\phi_t(m)$, alors le champ de vecteurs ξ est la donnée de n fonctions à valeurs réelles :

$$\begin{gathered} \xi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots \\ \xi_n(x_1, \ldots, x_n). \end{gathered}$$

L'équation différentielle est équivalente au système différentielle suivant :

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= \xi_1(x_1,\ldots,x_n), \\ &\ldots \\ \tfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= \xi_n(x_1,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

où la solution passe au temps $t=0$ par le point $\tilde{m}=(y_1,\ldots,y_n)$ avec $y_i=x_i(0)$ Les fonctions ξ_i étant lisses, les résultats d'existence et d'unicité pour les systèmes différentiels s'appliquent (théorème C.1). Il existe donc une unique solution lisse définie sur un voisinage de $(0,\tilde{m})$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Ainsi, en tout point m de M, il existe un voisinage U_m et $\varepsilon_m>0$ telle que le système différentiel possède une unique solution pour $p\in U_m, \quad |t|<\varepsilon_m$.
L'ensemble compact K peut être recouvert par un nombre fini de tels ouverts $\{U_m\}_{m\in\mathcal{M}}$. Soit $\varepsilon_0=\min_{m\in\mathcal{M}}\varepsilon_m$. En posant $\phi_t(m)=m$ lorsque $m\notin K$, l'équation différentielle possède une unique solution pour $|t|<\varepsilon_0$ et pour tout $m\in M$. De plus, l'unicité de la solution (remarque C.4) nous donne $\phi_{s+t}=\phi_s\circ\phi_t$ pour $|t|,|s|,|s+t|<\varepsilon_0$. Il reste à définir ϕ_t pour $|t|\geq\varepsilon_0$.
Soit $t\in\mathbb{R}$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ et un réel r avec $|r|<\frac{\varepsilon_0}{2}$ tels que $t=k\frac{\varepsilon_0}{2}+r$.

- Si $k\geq 0$, alors on pose

$$\phi_t=\underbrace{\phi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}\circ\ldots\circ\phi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}}_{k \text{ fois}}\circ\phi_r,$$

- sinon, on pose

$$\phi_t=\underbrace{\phi_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}\circ\ldots\circ\phi_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}}_{-k \text{ fois}}\circ\phi_r.$$

□

Exemple C.2. exemples de flots et champs de vecteurs

Exemple C.3. La courbe $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ définie par $\beta(t)=u+te_i$ avec e_i le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \beta'(t)=e_i \\ \beta(0)=u \end{cases}$$

En utilisant le vecteur vitesse d'une courbe, définie dans la preuve ci-dessus, β est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=D_i(\beta(t)) \\ \beta(0)=u. \end{cases}$$

Par définition, pour $t\in\mathbb{R}$ et $f\in(\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})_{\beta_t}$, on a

$$\begin{aligned} D_i(\beta(t)) &= \lim_{h\to 0}\tfrac{f(\beta(t)+he_i)-f(\beta(t))}{h}=\lim_{h\to 0}\tfrac{f(u+te_i+he_i)-f(\beta(t))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\tfrac{f(\beta(t+h))-f(\beta(t))}{h}=\tfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}(f). \end{aligned}$$

La preuve de la proposition C.1 montre qu'il est toujours possible de définir des flots de manière locale.

Définition C.6. Soit M une variété lisse. Un **flot local** est une application lisse

$$\phi : A \to M,$$

où $A \subseteq \mathbb{R} \times M$ est un ouvert contenant $\{0\} \times M$ tel que pour tout $m \in M$ l'intersection

$$J_m \times \{m\} = A \cap (\mathbb{R} \times \{m\})$$

soit connexe (ceci implique que J_m est un intervalle ouvert contenant 0), vérifiant

- $\phi(0, m) = m$,
- $\phi(s + t, m) = \phi(s, \phi(t, m))$

pour tout $m \in M$ tel que (t, m), $(s + t, m)$ et $(s, \phi(t, m))$ soient dans A.
Pour tout $m \in M$, on pose $J_m =]a_m, b_m[$ où $-\infty \leq a_m < 0 < b_m \leq +\infty$.

Définition C.7. Un flot local $\phi : A \to M$ est **maximal** si il n'existe pas de flot local $\psi : B \to M$ tel que $A \subsetneq B$ et $\psi_{|A} = \phi$.

Le résultat suivant affirme que tout flot maximal qui n'est pas global finit par sortir par tout compact.

Proposition C.2. *Soient $K \subset M$ un ensemble compact d'une variété lisse M et ϕ un flot local maximal sur M tel que $b_m < +\infty$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t > b_m - \varepsilon$, $\phi(t, m) \notin K$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[-\varepsilon, \varepsilon] \times K \subset A \cap (\mathbb{R} \times K)$.
Soit $b_m - \varepsilon < T \leq b_m$, on suppose par l'absurde que pour $t < T$, $\phi(t, m) \in K$ alors on pourrait prolonger ϕ à $]a_m, T + \varepsilon[\times\{m\}$, en posant pour tout $T \leq t < T + \varepsilon$

$$\phi(t, m) = \phi(\varepsilon, \phi(t - \varepsilon, m)).$$

Ceci contredit la maximalité de ϕ, d'où le résultat. □

On dispose d'un résultat analogue si $-\infty < a$.

C.2 Théorème de fibration d'Ehresmann

On rappelle la définition d'une fibration localement triviale.

Définition C.8. Soit $p : E \to M$ une application lisse entre variétés et F une variété lisse. p est un **fibré** (ou une **fibration localement triviale**) d'espace total E, de base B et de fibre F si pour tout $m \in M$, il existe un voisinage ouvert U_m et un difféomorphisme, appelé **trivialisation locale**

$$\phi_m : p^{-1}(U_m) \to U_m \times F$$

faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_m) \arrow[r, "\phi_m"] \arrow[dr, "p"'] & U_m \times F \arrow[d, "pr_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Remarque C.5. Pour $m \in M$, la fibre au-dessus de m, $p^{-1}(m)$ est difféomorphe à F.

Exemple C.4. Soient B et F des variétés lisses, la projection sur la première composante $p : B \times F \to B$ est un fibré. On dit que p est **le fibré trivial** de base B et de fibre F.
Un fibré $\pi : E \to F$ est **trivial** s'il existe un isomorphisme $f : E \to B \times F$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \times F \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Théorème C.2 (Théorème de fibration de Ehresmann)**.** *Si une applications lisse $f : E \to M$ est une submersion propre alors c'est une fibration localement triviale.*

L'idée de la preuve est la suivante, d'après le théorème du rang constant, localement une submersion correspond à une projection $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$, c'est à dire à un fibré trivial. Nous allons utiliser des flots et une partition de l'unité afin de recoller ces morceaux (Figure 5). Nous rappelons quelques résultats (dont les preuves sont données dans [Dun13]) avant de prouver de le théorème de fibration d'Ehresmann.

Théorème C.3 (Théorème du rang constant)**.** *Soient M et N des variétés lisses de dimensions respectives m et n, et $f : M \to N$ une application lisse de rang (le*

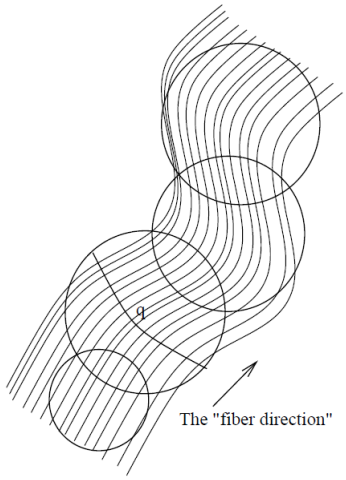


FIGURE 5 – Issue de [Dun13] A REPRODUIRE

rang de sa différentielle) constant k. Soit $p \in M$, il existe des cartes (x, U) définie sur un voisinage de p et (y, V) définie sur un voisinage de $f(p)$ telles que

$$y \circ f \circ x^{-1} = pr.$$

où $pr : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ désigne la projection sur les k premières coordonnées.

Définition C.9. Une **partition de l'unité** d'un espace topologique X est une famille de fonctions $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$

$$\phi_\alpha : X \to [0, 1]$$

telle que

- pour tout $x \in X$, il existe un voisinage tel que toutes les fonctions ϕ_α soient nulles sur ce voisinage à l'exception d'un nombre fini d'entre elles,
- pour tout $x \in X$, la somme finie $\sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(x) = 1$.

On dit que la partition est **subordonnée** à un recouvrement $\mathcal{U}$ de X si pour tout $\alpha \in J$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\mathrm{supp}(\phi_\alpha) \subseteq U$.

Théorème C.4. *Tout recouvrement d'une variété différentiable possède une partition de l'unité lisse qui lui est subordonnée.*

Nous sommes à présent en mesure de démontre le théorème de fibration de Ehresmann.

Démonstration. Comme il s'agit d'une question locale, il suffit de montrer que si $f : E \to \mathbb{R}^n$ une submersion propre alors il existe un difféomorphisme $h : E \to \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0)$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0) \arrow[d, "pr_{\mathbb{R}^n}"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Soit $p_0 \in E$ et $r_0 = f(p_0)$. Le théorème du rang constant (théorème C.3) affirme que pour tout $p \in f^{-1}(r_0)$ il existe une carte $x_p : U_p \to U'_p$ tel que le diagramme suivante commute :

$$\begin{tikzcd} U_p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x_p"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, equal] \\ U'_p \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \arrow[r, "pr"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

où $pr : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ désigne la projection sur les n premières coordonnées. D'après le théorème C.4, il existe une partition de l'unité $\{\phi_j\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_p\}$, c'est à dire tel que pour tout j, il existe $p \in f^{-1}(r_0)$ vérifiant $\mathrm{supp}(\phi_j) \subseteq U_p$. On pose $x_j := x_p$.
Pour $1 \leq i \leq n$, on définit le champ de vecteurs (i^{e} dérivée partielle dans la j^{e} carte)

$$\begin{aligned} X_{i,j} : \quad & U_j \to TU_j \\ & q \mapsto [\omega_{i,j}(q)] \end{aligned}$$

où $\omega_{i,j}(q)(t) = x_j^{-1}(x_j(q) + e_i t)$ et e_i désigne le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ceci nous permet de définir un champ de vecteur global pour $1 \leq i \leq n$:

$$X_i := \sum_j \phi_j X_{i,j} : E \to TE.$$

La composée suivante ne dépend pas de j.

$$\begin{aligned} f \circ \omega_{i,j}(q)(t) \quad & = \quad f \circ x_j^{-1}(x_j(q) + e_i t) \\ & \underset{\substack{f(u)=prx_j(u) \\ u \in Uj}}{=} \quad pr(x_j(q) + e_i t) \\ & = \quad f(q) + e_i t. \end{aligned}$$

Comme $\sum_j \phi_j(q) = 1$, on en déduit que pour $1 \leq i \leq n$:

$$dfX_i(q) = \sum_j \phi_j(q)[f \circ \omega_{i,j}(q)] = \sum_j \phi_j(q)[t \mapsto f(q) + e_i t] = [t \mapsto f(q) + e_i t].$$

Autrement dit, le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[r, "df"] & T\mathbb{R}^n \\ E \arrow[u, "X_i"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n. \arrow[u, "D_i"'] \end{tikzcd}$$

Soit $\psi_i : A_i \to E$ le flot local associé à X_i avec A_i ouvert de $\mathbb{R} \times E$, et soit J_q vérifiant $A_i \cap (\mathbb{R} \times \{q\}) = J_q \times q$.
Fixons $q \in E$ et $1 \leq i \leq n$. On pose $\alpha(t) = \psi_i(t, q)$. Puisque X_i est un champ de vecteur engendré par le flot ψ_i, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) = X_i(\alpha(t))$, et donc, le triangle du diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
 & TE \arrow[r, "df"] & T\mathbb{R}^n \\
J_q \arrow[ur, "\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}"] \arrow[r, "\alpha"] & E \arrow[u, "X_i"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "D_i"']
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $D_i(f \circ \alpha(t)) = df(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t})$. Comme

$$\begin{cases} D_i(f \circ \alpha(t)) = df(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}) = \frac{\mathrm{d}(f \circ \alpha)}{\mathrm{d}t} \\ (f \circ \alpha)(0) = f(q), \end{cases}$$

d'après l'exemple C.3, on a

$$f \circ \psi_i(t, q) = f \circ \alpha(t) = f(q) + te_i.$$

On souhaite montrer que le flot est global, c'est à dire que que $A_i = \mathbb{R} \times E$. Comme $f \circ \psi_i(t, q) = f(q) + te_i$, l'image d'un intervalle ouvert borné par $f \circ \psi_i(_, q)$ est contenu dans un compact K. Ainsi, l'image du même intervalle ouvert borné par $\psi_i(_, q)$ est contenu dans $f^{-1}(K)$ qui est compact car f est propre. Supposons par l'absurde que $J_q \neq \mathbb{R}$, alors d'après la proposition C.2, la courbe $\psi_i(_, q)$ finit par sortir de tout compact, notamment de $f^{-1}(K)$, d'où une contradiction.
On définit le difféomorphisme

$$\psi : \mathbb{R}^n \times f^{-1}(r_0) \to E$$

par $\psi(t, q) = \psi_1(t_1, \psi_2(t_2, \psi_3(t_3, \ldots \psi_n(t_n, q) \ldots)$ où $t = (t_1, \ldots, t_n)$.
Son inverse est donné par

$$\psi^{-1}(q) = (f(q) - r_0, \psi_n(r_{0,n} - f_n(q), \ldots, \psi_1(r_{0,1} - f_1(q), q) \ldots)$$

où $r_0 = (r_{0,1}, \ldots, r_{0,n})$ et $f(q) = (f_1(q), \ldots, f_n(q))$.
En effet, soient $(t, q) \in \mathbb{R}^n \times f^{-1}(r_0)$ et $1 \leq i \leq n$, on a $f \circ \psi_i(t, q) = f(q) + te_i$, d'où

$$f \circ \psi(t, q) = f(q) + t = r_0 + t.$$

Ainsi, la première composante de $\psi^{-1} \circ \psi(t, q)$ vaut t. De plus, $r_{0,i} - f_i(q) = -t_i$ et $\psi_i(-t_i, \psi_i(t_i, q)) = q$, on en déduit que $\psi^{-1} \circ \psi(t, q) = (t, q)$.
Ceci montre également que f est surjective, en prenant $r_0 = 0$, on obtient le difféomorphisme recherché

$$h : E \to \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0).$$

$\square$

C.3 Applications du théorème

Le résultat suivant peut se déduire du théorème de fibration de Ehresmann en remarquant que $f : M \to [a, b]$ est un submersion propre. Toutefois, nous allons en donner une preuve directe en utilisant de nouveau un flot.

Proposition C.3 (Lemme de Morse)**.** *Soient M une variété et $f : M \to \mathbb{R}$ lisse. Soient $a < b$ deux réels tels que $f^{-1}([a, b])$ soit compact et ne contienne pas de points critiques de f. Alors $M^a := f^{-1}(]-\infty, a]$ est difféomorphe à M^b.*

Démonstration. On va envoyer M^b sur M^a en poussant le long des trajectoires orthogonales aux sous-variétés $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$.
RAJOUTER DESSIN
On munit M d'une métrique riemannienne et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé. Le **gradient** de f est le champ de vecteurs $\nabla f : m \mapsto \nabla_m f$ caractérisé par l'identité :

$$\langle \nabla_m f, \xi \rangle = d_m f(\xi).$$

Le gradient s'annule précisément en chaque point critique de f. On peut donc définir sur $f^{-1}([a, b])$ (et même sur un voisinage ouvert $f^{-1}(]a - \varepsilon, b + \varepsilon[)$ pour un certain $\varepsilon > 0$), le champ de vecteur V :

$$V(m) = \frac{1}{\langle \nabla_m f, \nabla_m f \rangle} \nabla_m f.$$

Soit $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, valant 1 sur $[a, b]$ et à support compact dans $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ (c'est une fonction plateau). On la relève en une fonction lisse $g : M \to \mathbb{R}$ en posant $g(m) = \tilde{g}(f(m))$. Le champ de vecteurs $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V}(m) = \frac{g(m)}{\langle \nabla_m f, \nabla_m f \rangle} \nabla_m f$$

est un champ de vecteurs à support compact. D'après la proposition C.1, il engendre un flot, c'est à dire un groupe de difféomorphismes à un paramètre :

$$\phi_t : M \to M.$$

Soit $m \in M$, on pose $p = \phi_t(m)$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_t(m)) & = & d_t(f \circ \phi_t(m))(1) \\
& \underset{\substack{\text{différentielle} \\ \text{d'une composée}}}{=} & d_{\phi_t(m)} f \circ d_t \phi_t(m)(1) \\
& = & d_{\phi_t(m)} f(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi_t(m)) \\
& = & \langle \nabla_{\phi_t(m)} f, \frac{\mathrm{d}\phi_t(m)}{\mathrm{d}t} \rangle \\
& = & \langle \nabla_p f, \mathcal{V}(p) \rangle \\
& = & g(p) \quad \subset \quad [0, 1].
\end{array}$$

En particulier, si $p = \phi_t(m) \in f^{-1}([a,b])$, $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_t(m)) = 1$.
On va montrer que $\phi_{b-a}(M^a) = M^b$ et $\phi_{a-b}(M^b) = M^a$. Pour cela, commençons par voir que $\phi_{b-a}(M^a) \subset M^b$. Par définition, pour $m \in M$ et $d > 0$, on a

$$f(\phi_d(m)) - f(m) = \int_0^d \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_t(m))\,\mathrm{d}t \in [0,d] \text{ et}$$

$$f(m) - f(\phi_{-d}(m)) = \int_{-d}^0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_t(m))\,\mathrm{d}t \in [0,d].$$

Autrement dit

$$f(m) \leq f(\phi_d(m)) \leq f(m) + d \text{ et}$$
$$f(m) - d \leq f(\phi_{-d}(m)) \leq f(m).$$

Si $m \in M^a = f^{-1}(]-\infty, a])$, alors $\phi_{b-a}(m) \in M^b$. En effet, pour $d = b - a$, on a

$$f(m) \leq f(\phi_{b-a}(m)) \leq b - a + f(m) \leq b.$$

Ainsi, on a $\phi_{b-a}(M^a) \subset M^b$.
En appliquant le même raisonnement à ϕ_{a-b}, on trouve que $\phi_{a-b}(M^a) \subset M^a$. Si on montre que $\phi_{a-b}(f^{-1}([a,b])) \subset M^a$, on pourra en déduire que $\phi_{a-b}(M^b) \subset M^a$. Soit $m \in f^{-1}([a,b])$, on a $f(m) = a + \delta$ avec $0 \leq \delta \leq b - a$. Montrons que pour tout $s \in [0,\delta]$, $f(\phi_{-s}(m)) = a + \delta - s$. Pour tout $s \in [0,\delta]$, on a

$$a \leq a + \delta - s = f(m) - s \leq f(\phi_{-s}(m)) \leq f(m) = a + \delta \leq b.$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_{-s}(m)) = 1.$$

Soit $s \in [0,\delta]$, on a

$$f(\phi_{-s}(m)) - f(m) = \int_0^{-s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_t(m))\,\mathrm{d}t = -s,$$

d'où

$$f(\phi_{-s}(m)) = a + \delta - s.$$

En particulier $f(\phi_{-\delta}(m)) = a$. On dispose de l'encadrement

$$a - b \leq f(\phi_{-\delta}(m)) + a - b + \delta \leq f(\phi_{a-b+\delta}(\phi_{-\delta}(m))) \leq f(\phi_{-\delta}(m)) = a.$$

Or, $f(\phi_{a-b+\delta}(\phi_{-\delta}(m))) = f(\phi_{a-b}(m))$, d'où $\phi_{a-b}(m) \in M^a$.
On a montré que $\phi_{b-a}(M^a) \subset M^b$ et $\phi_{a-b}(M^b) \subset M^a$, comme

$$\phi_{a-b} \circ \phi_{b-a} = \phi_{b-a} \circ \phi_{a-b} = \mathrm{id}_M$$

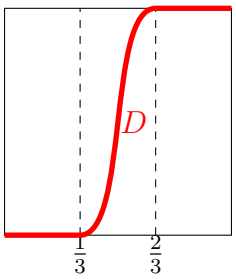
on en déduit que

$$\phi_{b-a}(M^a) = M^b \text{ et } \phi_{a-b}(M^b) = M^a.$$

$\square$

On présente une application du théorème de fibration d'Ehresmann qui intervient dans la preuve de la proposition 3.5. Rappelons le contexte.

On se donne une diagonale lissée $D \subset [0,1]^2$, elle s'obtient comme graphe d'une fonction $\epsilon : [0,1] \to [0,1]$ dont la dérivée est nulle sur $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On suppose de plus qu'elle est bijective sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ avec une fonction inverse lisse.



Proposition C.4. *Soient P une variété, et $p : P \to]0,1[\times[0,1]$ une application lisse vérifiant $p = q \circ \pi$ où q est un fibré trivial et π est une submersion lisse et propre . Alors, les sous-variétés $p^{-1}(]0,1[\times\{0\})$, $p^{-1}(]0,1[\times\{1\})$ et $p^{-1}(D)$ sont difféomorphes.*

D'après le théorème d'Ehresmann, π est un fibré. En fait, grâce au résultat suivant, il s'agit même d'un fibré trivial.

Proposition C.5. *Soient $p : E \to X$ un fibré et $f, g : Y \to X$ deux applications définies sur un espace paracompact Y. Si f et g sont homotopes alors les fibrés f^*E et g^*E sont difféomorphes où f^*E est le pullback du diagramme suivant.*

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Avant de prouver ce résultat, nous rappelons la définition d'un espace paracompact ainsi qu'une de ses propriétés qui sera utilisée par la suite.

Définition C.10. Un espace **paracompact** est un espace topologique X séparé tel que tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement localement fini. C'est à dire que pour tout point de X, il existe un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts du sous-recouvrement.

Théorème C.5. *Un espace topologique est paracompact si et seulement si tout recouvrement ouvert admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée.*

Nous allons à présent démontrer la proposition C.5.

Démonstration.

Partie 1 (Simplification de l'énoncé).
On pose $I = [0,1]$. Il suffit de prouver le résultat pour $i_0,\ i_1 : Y \to Y \times I$ définis pour tout $y \in Y$ par $i_0(y) = (y,0)$ et $i_1(y) = (y,1)$. Supposons qu'on ait un difféomorphisme entre i_0^*E et i_1^*E pour tout fibré $E \to Y \times I$.

$$\begin{tikzcd}
i_0^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] & i_1^*E \arrow[l] \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "i_0"'] & Y \times I & Y \arrow[l, "i_1"]
\end{tikzcd}$$

Soit $E \to X$ un fibré et $f, g : Y \to X$ deux applications homotopes, d'homotopie H, alors on a un difféomorphisme entre $i_0^*H^*E$ et $i_1^*H^*E$ c'est à dire entre f^*E et g^*E.

$$\begin{tikzcd}
f^*E \simeq i_0^*H^*E \arrow[r] \arrow[d] & H^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] & H^*E \arrow[l] \arrow[d] & i_1^*H^*E \simeq g^*E \arrow[l] \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "i_0"'] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & Y \times I \arrow[r, "H"'] & X & Y \times I \arrow[l, "H"] & Y \arrow[l, "i_1"] \arrow[lll, bend left, "g"]
\end{tikzcd}$$

Soit $p : E \to Y \times I$ un fibré, par définition, on a

$$i_0^*E = \{(e,y) \in E \times Y : p(e) = (y,0)\} = \bigcup_{y \in Y} p^{-1}(y,0)$$

et

$$i_1^*E = \{(e,y) \in E \times Y : p(e) = (y,1)\} = \bigcup_{y \in Y} p^{-1}(y,1).$$

Si on montre que pour tout $y \in Y$, on a un difféomorphisme entre $p^{-1}(y,0)$ et $p^{-1}(y,1)$ alors i_0^*E et i_1^*E seront difféomorphes.

Partie 2 (Preuve de l'énoncé simplifié). Soient Y un espace paracompact et $p : E \to Y \times I$ un fibré de fibre F. Soit $\alpha \in Y$ fixé, pour tout $t \in I$ il existe un voisinage $U(t)$ de α dans Y et un voisinage $V(t)$ de t dans I et une trivialisation locale

$$\phi_t : p^{-1}(U(t) \times V(t)) \to U(t) \times V(t) \times F.$$

La famille $\{V(t)\}_{t\in I}$ forme un recouvrement de l'espace compact I, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $\{V(t_i)\}_{0\leq i\leq n}$ où $V(t_i) =]a_i, b_i[$. Quitte à réarranger les ouverts, on peut supposer que deux intervalles consécutifs se chevauchent, c'est à dire que pour $0 \leq i \leq n-1$,

$$V(t_i) \cap V(t_{i+1}) \neq \emptyset.$$

En posant $c_0 = 0,\ c_n = 1$ et en choisissant un rationnel $c_i \in V(t_i) \cap V(t_{i+1})$, on obtient une suite croissante $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = 1$ tel que le fibré soit trivial sur $U(t_{i+1}) \times [c_i, c_{i+1}]$. On pose $U_\alpha = \cap_{0\leq i\leq n} U(t_i)$, il existe un entier m suffisament grand (on peut par exemple écrire les c_i sous forme de fractions et prendre le plus petit commun multiple des dénominateurs) tel que pour tout $0 \leq j < m$ on ait des trivialisations locales

$$\Phi_{\alpha,j} : U_\alpha \times [\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}] \times F \to p^{-1}(U_\alpha \times [\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}]).$$

Le résultat suivant permet de construire des trivialisations globales

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \times [0,1] \times F \to p^{-1}(U_\alpha \times [0,1]).$$

Partie 3 (**Tout fibré de base** $[0,1]$ **est trivial.**).
On commence par prouver ce résultat avant d'expliquer comment il permet de construire les trivialisations données ci-dessus.
Soit $\pi : E \to I$ un fibré. Il existe un entier n suffisamment grand pour lequel il existe des trivialisations

$$\phi_i : F \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \to \pi^{-1}([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]).$$

On souhaite recoller ces applications afin d'obtenir un difféomorphisme

$$\phi : F \times I \to E.$$

Pour pouvoir poser $\phi(y,t) = \phi_i(y,t)$ pour $(y,t) \in F \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, il faudrait s'assurer que $\phi_{i-1}(y, \frac{i}{n}) = \phi_i(y, \frac{i}{n})$, ce qui n'est pas nécessairement le cas. C'est pourquoi nous allons modifier les fonctions ϕ_i.
Pour $0 \leq i \leq n-1$, on définit $\theta_i : F \to F$ par

$$\theta_i(y) = proj_1 \circ \phi_i^{-1}(\phi_{i-1}(y, \frac{i}{n}))$$

$$\begin{tikzcd}
F & F \times \{\frac{i}{n}\} \arrow[l, "proj_1"'] \arrow[r, bend right, "\phi_{i-1}"'] & \pi^{-1}(\frac{i}{n}) \arrow[l, bend right, "\phi_i^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

On pose $\overline{\theta}_i = \theta_i \circ \ldots \circ \theta_1$ et $\overline{\theta}_0 = \mathrm{id}_F$.
Alors, pour $1 \leq i \leq n$ et tout $y \in F$, on a

$$\phi_i(\overline{\theta}_i(y), \frac{i}{n}) = \phi_{i-1}(\overline{\theta}_{i-1}(y), \frac{i}{n}).$$

Montrons que l'égalité est bien vérifiée pour $i = 1$, le cas général se déduit par récurrence. Pour $i = 1$, on souhaite montrer que

$$\phi_1(\theta_1(y), \frac{1}{n}) = \phi_0(y, \frac{1}{n}).$$

Or, comme $\theta_1(y) = proj_1 \circ \phi_1^{-1}(\phi_0(y, \frac{1}{n}))$, on a $(\theta_1(y), \frac{1}{n}) = \phi_1^{-1}(\phi_0(y, \frac{1}{n}))$ et on obtient l'égalité souhaitée. La situation est résumée dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & (y, \frac{1}{n}) \arrow[dl] \arrow[dr, "\phi_0"] & \\
\theta_1(y) \arrow[dr, bend right, "(\cdot, \frac{1}{n})"'] & & \phi_0(y, \frac{1}{n}) \arrow[dl, bend left, "\phi_1^{-1}"'] \\
 & (\theta_1(y), \frac{1}{n}) \arrow[ul, bend left, "proj_1"] \arrow[ur, bend right, "\phi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

On définit une trivialisation globable

$$\psi : F \times [0,1] \to E$$

en posant

$$\psi(y,t) = \phi_i(\overline{\theta}_i(y), t) \text{ pour } t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}].$$

Les égalités précédentes permettent de s'assurer que l'application est bien définie sur les bords des intervalles $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$.
Ainsi, à partir de trivialisations locales du fibré sur les intervalles $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ on a construit une trivialisation globale. Cette preuve s'adapte à une version à paramètre. On montre de façon analogue que si l'on a un fibré $E \to U \times I$ et des fibrés triviaux de E sur $U \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$, alors le fibré $E \to U \times I$ est trivial.

Partie 4 (Retour à la preuve de la version simplifiée).
On dispose de trivialisations

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \times [0,1] \times F \to p^{-1}(U_\alpha \times [0,1]).$$

Elles permettent de définir des applications entre les fibres $E_{y,t} = p^{-1}(y,t)$:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha(y,t,t') : \quad & E_{y,t} \to E_{y,t'} \\ & e \mapsto \Phi_\alpha(y,t', proj_3 \circ \phi_\alpha^{-1}(e)) \end{aligned}$$

Si $y \in U_\alpha$ alors $\tau_\alpha(y,0,1) : E_{y,0} \to E_{y,1}$ est un difféomorphisme de réciproque $\tau_\alpha(y,1,0)$. Afin d'obtenir un difféomorphisme pour tout $y \in Y$, on va utiliser le fait que Y soit paracompact. Quitte à extraire un sous-recouvrement, on peut supposer que le recouvrement $\{U_\alpha\}$ soit localement fini. D'après le théorème C.5, on peut trouver une partition de l'unité $\{\rho_\alpha\}$ qui lui est subordonnée. On munit l'ensemble des indices α d'un ordre. Soient $y \in Y$ et $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ les seuls indices pour lesquels $y \in U_{\alpha_i}$. Alors $\sum_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}(y) = 1$. Pour $0 \leq j \leq n$, on pose $t_j = \sum_{i=1}^j \rho_{\alpha_i}(y)$ et on définit l'application $\tau(y) : E_{y,0} \to E_{y,1}$ comme composée des difféomorphismes $\tau_{\alpha_i}(y, t_{i-1}, t_i) : E_{y,t_{i-1}} \to E_{y,t_i}$ de réciproque $\tau_{\alpha_i}(y, t_i, t_{i-1})$ où $1 \leq i \leq n$. On définit ainsi pour tout $y \in Y$, un difféomorphisme $\tau(y) : E_{y,0} \to E_{y,1}$.

□

Corollaire C.1. *Si $\pi : E \to B$ est un fibré sur un ensemble B contractile et paracompact alors π est un fibré trivial.*

Démonstration. Comme B est contractile, il existe $b_0 \in B$ et une application $r : B \to \{b_0\}$ telle que $r \circ i = \mathrm{id}_{\{b_0\}}$ et $f = i \circ r : B \to B$ soit homotope à id_B, avec $i : \{b\} \to B$ désignant l'inclusion. D'après la propriété précédente, f^*E et $\mathrm{id}^*E \simeq E$ sont difféomorphes. Or, on a

$$f^*E = \{(b,e) \in B \times E : b_0 = \pi(e)\} \simeq B \times \pi^{-1}(b_0) \simeq B \times F.$$

Ainsi, π est un fibré trivial. □

L'espace $]0,1[\times[0,1]$ étant contractile, nous sommes ramenés à prouver le résultat suivant.

Proposition C.6. *Soient P une variété, et $p : P \to]0,1[\times[0,1]$ une application lisse. Si p est un fibré trivial alors les sous-variétés $p^{-1}(]0,1[\times\{0\})$, $p^{-1}(]0,1[\times\{1\})$ et $p^{-1}(D)$ sont difféomorphes.*

Démonstration. On pose $X =]0,1[\times\{0\}$ et $D = \{(x, \epsilon(x)) : x \in]0,1[\}$. Soit

$$\begin{aligned} f : \quad & X \to D \\ & (x,t) \mapsto (x, \epsilon(x) + t) \end{aligned}$$

une application lisse de réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad & D \to X \\ & (u,v) \mapsto (u, v - \epsilon(u)). \end{aligned}$$

Le jacobien de f vaut 1, c'est donc un difféomorphisme.
On va relever ce difféomorphisme le long du fibré trivial p. On dispose du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(X) \simeq F \times X \arrow[r, "\mathrm{id}\times f"] \arrow[d, "p"] & F \times D \simeq p^{-1}(D) \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & D \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un difféomorphisme entre $p^{-1}(]0,1[\times\{0\})$ et $p^{-1}(D)$. On montre de façon analogue que $p^{-1}(]0,1[\times\{1\})$ et $p^{-1}(D)$ sont difféomorphes. $\square$

D Fibrés principaux

Dans toute la suite, G désignera un groupe topologique. Un **G-espace à gauche** est un espace topologique X muni d'une action continue à gauche $G\times X \to X$.
Une application entre G-espaces $\phi : X \to Y$ est **G-équivariante** si

$$\forall x \in X, g \in G \quad \phi(gx) = g\phi(x).$$

Définition D.1. Soient B un espace topologique et G un groupe agissant à droite sur un espace topologique P muni d'une application G-équivariante $p : P \to B$ où G agit trivialement sur B (p se factorise donc à travers ${}^{P}\!/_{G}$). On dit que (P, p) est une **fibré G-principal** sur B si p vérifie la condition de trivialité locale :
pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U_b de b et un homéomorphisme G-équivariant $\phi_{U_b} : p^{-1}U_b \to U_b \times G$ qui fait commuté le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} p^{-1}U_b \arrow[r, "\phi_{U_b}"] \arrow[d, "p"] & U_b \times G \arrow[dl, "p_{U_b}"] \\ U_b & \end{tikzcd}$$

Remarque D.1. Le groupe G opère à droite sur $U_b \times G$ par $(u, g).h = (u, gh)$. La condition de trivialité locale implique que G agit de façon libre sur P. Ainsi p se factorise en un homéomorphisme $\overline{p} : {}^{P}\!/_{G} \to B$. On peut donc identifier B avec l'espace des orbites de P sous l'action de G.

Définition D.2. Un **morphisme** entre fibrés principaux P, Q sur B est une application G-équivariante $P \to Q$. On note $\mathcal{P}_G B$ les classes d'isomorphismes de fibrés G-principaux sur B.
Un fibré G-principal sur B est **trivial** s'il est isomorphe au fibré principal $B\times G \to B$.

Étant donnés un fibré G-principal P sur B et une application $f : B' \to B$, on note $f^*p = B' \times_B P$ la limite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^*P & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

Cette limite hérite d'une structure de fibré G-principal sur B'.

Proposition D.1. *A tout fibré vectoriel réel on peut associer un fibré $GL_n\mathbb{R}$-principal.*

Démonstration. Soit $\xi = (E, p, B)$ un fibré vectoriel réel de rang n. On note ϵ^n le fibré trivial $B \times \mathbb{R}^n$. On considère le fibré vectoriel $\underline{Hom}(\epsilon^n, E)$ dont la fibre F_b au-dessus de $b \in B$ est donné par

$$F_b = Hom(F_b(\epsilon^n), p^{-1}(b)) = Hom(\mathbb{R}^n, p^{-1}(b)),$$

l'espace total est $\underline{E} = \bigcup_{b \in B} F_b$ et la projection $\pi : \underline{E} \to B$ vérifie $\pi(F_b) = b$.
On pose $P = \underline{Iso}(\epsilon^n, E)$, c'est le fibré vectoriel dont la fibre au-dessus de $b \in B$ est l'ensemble des isomorphismes $Iso(\mathbb{R}^n, p^{-1}(b))$. On notera également π la projection.
$GL_n\mathbb{R}$ agit à gauche sur ϵ^n par $g.(b, v) = (b, g.v)$ ce qui induit une action à droite sur $\underline{Hom}(\epsilon^n, E)$ et donc sur $\underline{Iso}(\epsilon^n, E)$.
Montrons que $\pi : P \to B$ est un fibré $GL_n\mathbb{R}$-principal. L'action de $GL_n\mathbb{R}$ sur P est libre puisqu'elle l'est sur $\mathbb{R}^n$. (E, p, B) étant un fibré vectoriel, pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U et un homéomorphisme $U \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U)$. On a

$$\pi^{-1}(U) = \cup_{b \in U} Iso(\mathbb{R}^n, p^{-1}(b)) \simeq \cup_{b \in U} Iso(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \simeq U \times Gl_n\mathbb{R}.$$

Ainsi, $P \to B$ est bien un fibré $GL_n\mathbb{R}$-principal. □

Remarque D.2. Il existe une autre façon de définir le fibré $Gl_n\mathbb{R}$ principal. On pose $P = V_n\xi$ qui correspond au fibré des n-repères, c'est à dire à l'ensemble des paires $(b, \underline{v}) \in B \times (p^{-1}(b))^n$ où $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ est un repère, c'est à dire une famille de n vecteurs libres. On peut montrer que l'application

$$\begin{array}{l} \underline{Iso}(\epsilon^n, \xi) \to V_n\xi \\ (b, f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\simeq} p^{-1}(b)) \mapsto (b, (f(e_1), \ldots, f(e_n))) \end{array}$$

avec $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme $Gl_n\mathbb{R}$-équivariant.

Proposition D.2. *Pour tout espace B, on a une bijection naturelle*

$$\phi : \mathcal{P}_{GL_n\mathbb{R}}B \to Vect_n^{\mathbb{R}}B$$

donnée par $P \mapsto P \times_{GL_n\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$. L'application inverse s'obtient en considérant la construction donnée ci-dessus.

Théorème D.1. *Soit $P \to B$ un fibré G-principal avec P faiblement contractile. Alors pour tout CW-complexe X, l'application*

$$\begin{aligned} \phi : \quad & [X, B] \to \mathcal{P}_G X \\ & f \to f^* P \end{aligned}$$

est bijective.

Définition D.3. On dit que B est un **espace classifiant** pour G et P est un fibré G principal **universel**.

Remarque D.3. L'espace classifiant est unique à équivalence homotopique près.

Avant de voir des exemples, rappelons quelques définitions.

Définition D.4. Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \leq k$.

- La n^{e} **variété de Stiefel** de $\mathbb{R}^k$, $V_n(\mathbb{R}^k)$ est l'ensemble de ses n-repères orthonormaux, c'est à dire les familles de n-vecteurs orthonormaux de $\mathbb{R}^k$.
- La n^{e} **grassmannienne** de $\mathbb{R}^k$, $Gr_n(\mathbb{R}^k)$ est l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels de dimension n. On peut également prendre $k = \infty$ et considérer $\mathbb{R}^\infty$ un espace vectoriel réel de dimension infini.

Exemple D.1. Voici quelques exemples d'espaces classifiants.

- Un espace classifiant de $\mathbb{Z}$ est le cercle $\mathbb{S}^1$. L'espace total est $E\mathbb{Z} = \mathbb{R}$.
- $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ est un espace classifiant pour $Gl_n\mathbb{R}$ et $O(n)$. L'espace totale est $V_n(\mathbb{R}^\infty)$.
- $\widehat{Gr_n}(\mathbb{R}^\infty)$ est un espace classifiant pour $SO(n)$. L'espace totale est $\widehat{V_n}(\mathbb{R}^\infty)$ où $\widehat{\ }$ signifie que l'on considère des familles orientées de vecteurs.

Dans toute la suite, pour tout groupe G, on fixe un espace classifiant BG qui est un CW-complexe.

Soit $\theta : H \to G$ un morphisme de groupes. H agit à gauche sur G par $h.g = \theta(h)g$. G opère sur lui même par multiplication à droite. Pour $P : H \to B$ un fibré H-principal, on considère le **produit équilibré** $P \times_H G := \{(p, g) \in P \times G : (p.h, g) = (p, h.g)\}$. L'action à droite de G sur $P \times_H G$ est libre et on montre que $P \times_H G \to B$ est un fibré G-principal. On a donc une transformation naturelle

$$\mathcal{P}_\theta : \mathcal{P}_H B \to \mathcal{P}_G B.$$

Il existe une unique classe d'homotopie $B\theta : BH \to BG$ induisant $\mathcal{P}_\theta$. Elle apparaît dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} EH \times_H G \arrow[r] \arrow[d] & EG \arrow[d] \\ BH \arrow[r, "B\theta"] & BG \end{tikzcd}$$

Proposition D.3. *On a un foncteur entre la catégorie des groupes topologiques et la catégorie homotopique des CW-complexes :*

$$B\theta : G \mapsto BG.$$

Bibliographie

[Abr96] Lowell Abrams. « Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras ». In : *Journal of Knot theory and its ramifications* 5.05 (1996), p. 569-587.

[Ati89] Michael Atiyah. « The Jones-Witten invariants of knots ». In : *Séminaire Bourbaki* 1989 (1989), p. 90.

[Ati88] Michael F Atiyah. « Topological quantum field theory ». In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 68 (1988), p. 175-186.

[Bae04] John Baez. « Some definitions everyone should know ». In : *Category Theory Lectures) http ://math. ucr. edu/home/baez/qg-winter2001/definitions. pdf* (2004).

[BD95] John C Baez et James Dolan. « Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory ». In : *Journal of Mathematical Physics* 36.11 (1995), p. 6073-6105.

[Ber10] Julia E Bergner. « A survey of (∞, 1)-categories ». In : *Towards higher categories*. Springer, 2010, p. 69-83.

[Bre93] Glen E Bredon. *Topology and geometry*. T. 139. Springer Science & Business Media, 1993.

[CS19] Damien Calaque et Claudia Scheimbauer. « A note on the (∞, n)–category of cobordisms ». In : *Algebraic & Geometric Topology* 19.2 (2019), p. 533-655.

[CW14] J Daniel Christensen et Enxin Wu. « The homotopy theory of diffeological spaces ». In : *New York J. Math* 20 (2014), p. 1269-1303.

[Dav11] Orit DAVIDOVICH. « State sums in two dimensional fully extended topological field theories ». Thèse de doct. 2011.

[Dem16] Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed.* EDP sciences, 2016.

[DP83] Albrecht DOLD et Dieter PUPPE. « Duality, trace and transfer ». In : *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova* 154 (1983), p. 81-97.

[Dun13] Bjørn Ian DUNDAS. « Differential topology ». In : *preprint available at http ://folk. uib. no/nmabd/dt/dtcurrent. pdf* (2013).

[Dwy01] William G DWYER. « Classifying spaces and homology decompositions ». In : *Homotopy theoretic methods in group cohomology.* Springer, 2001, p. 1-53.

[DS95] William G DWYER et Jan SPALINSKI. « Homotopy theories and model categories ». In : *Handbook of algebraic topology* 73 (1995), p. 126.

[Fre13] Daniel FREED. « The cobordism hypothesis ». In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 50.1 (2013), p. 57-92.

[FQ93] Daniel S FREED et Frank QUINN. « Chern-Simons theory with finite gauge group ». In : *Communications in Mathematical Physics* 156.3 (1993), p. 435-472.

[Fre+09] Daniel S FREED et al. « Topological quantum field theories from compact Lie groups ». In : *arXiv preprint arXiv :0905.0731* (2009).

[Fri12] Greg FRIEDMAN. « Survey article : an elementary illustrated introduction to simplicial sets ». In : *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* (2012), p. 353-423.

[GJ09] Paul G GOERSS et John F JARDINE. *Simplicial homotopy theory.* Springer Science & Business Media, 2009.

[GM13] Moritz GROTH et Ieke MOERDIJK. *Course on algebraic topology II. Section 11 : Homotopy invariance of fiber bundles.* 2013/2014. URL : https://www.math.ru.nl/~mgroth/teaching/algtopII14/Section11.pdf.

[Gro83] Alexander GROTHENDIECK. *Pursuing stacks.* unpublished manuscript, 1983.

[Hes17] Jan HESSE. « Group Actions on Bicategories and Topological Quantum Field Theories ». In : (2017).

[Koc04] Joachim KOCH. « Frobenius algebras and 2D topological quantum field theory ». In : *London Mathematical Society Student Texts* 59 (2004).

[Laf12] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP sciences, 2012.

[Lei98] Tom Leinster. « Basic bicategories ». In : *arXiv preprint math/9810017* (1998).

[Lei04] Tom Leinster. *Higher operads, higher categories*. T. 298. Cambridge University Press, 2004.

[Lur09a] Jacob Lurie. *Higher topos theory*. Princeton University Press, 2009.

[Lur09b] Jacob Lurie. « On the classification of topological field theories ». In : *Current developments in mathematics* 2008 (2009), p. 129-280.

[Lur18] Jacob Lurie. *Kerodon*. 2018. URL : https://kerodon.net/.

[MSW69] John Milnor, Michael Spivak et Robert Wells. *Morse theory*. T. 1. Princeton university press Princeton, 1969.

[MS75] John Milnor et James D Stasheff. *Characteristic Classes.(AM-76)*. T. 76. Princeton university press, 1975.

[Mit01] Stephen A Mitchell. « Notes on principal bundles and classifying spaces ». In : *Lecture Notes. University of Washington* (2001).

[Rez01] Charles Rezk. « A model for the homotopy theory of homotopy theory ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 353.3 (2001), p. 973-1007.

[SPC14] Christopher Schommer-Pries et J Christopher. « Dualizability in low-dimensional higher category theory ». In : *Contemp. Math. Topology and field theories* (2014), p. 111-176.

[Wit89] Edward Witten. « Quantum field theory and the Jones polynomial ». In : *Communications in Mathematical Physics* 121.3 (1989), p. 351-399.

[Wit+82] Edward Witten et al. « Supersymmetry and Morse theory ». In : *J. diff. geom* 17.4 (1982), p. 661-692.